Universidad Simón Bolívar
Preparadurías de Matemáticas

CLASES DE PREPARADURIAS COMPLETA:

MATEMÁTICAS 5

TRIMESTRE

ENERO – MARZO 2012

Profesor asignado: Juricek, Libuska.

Previo:

Enero – Marzo 2011, *Profesor asignado*: **Varios.**

Enero – Marzo 2010, *Profesor asignado:* **Ramírez, Victor**.

Preparador:

Miguel Guzmán

Ingeniería Mecánica 06”

Sartenejas; Septiembre 2012

TEMARIO.

Prepa del: **Viernes 13 – 1 – 2012**

- Limites de dos variables. Trayectoria RECTA.
- Definición de límite.

Prepa del: **Viernes 20 – 01 – 2012**

- Continuidad de funciones de dos variables
- Diferenciabilidad de funciones de dos variables
- Diferenciabilidad de funciones de tres variables.

Prepa del: **Viernes 27 – 01 – 2012**

- Continuidad y diferenciabilidad de funciones
- Regla de la cadena de composición de función multi variable. (GRADIENTE)
- Plano tangente.

Prepa del: **Viernes 3 – 02 – 2012**

- Derivada direccional.
- Plano tangente.
- Derivación implícita.
- Derivadas cruzadas (orden superior)
- Polinomio de Taylor de segundo orden.
- Puntos críticos (calculo y clasificación)

Prepa del: **Viernes 10 – 02 – 2012 REPASO PRIMER PARCIAL.**

- Clasificación de máximos y mínimos globales. (LaGrange)

Prepa del: **Viernes 24 – 02 – 2012**

- Integral de trayectoria
- Integral de línea
- Campo conservativo

Prepa del: **Viernes 2 – 03 – 2012**

- Integrales dobles (Cambio de orden de integración)
- Integrales dobles (Resolución)

Prepa del: **Viernes 9 – 03 – 2012**

- Teorema de Green
- Cambio de variable.
- Cambio Polar

Prepa del: **Viernes 16 – 03 – 2012**

- Integrales triple (Volumen)
- Cambio Esférica
- Cambio Cilíndrica

Prepa del: **Viernes 23 – 03 – 2012 REPASO SEGUNDO PARCIAL.**

Preparado por: Miguel Guzmán

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 13-01-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

***.-** Halle el límite siguiente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

SOLUCION.

Observamos que para el punto a donde tiende el límite el denominador $x^4+y^2=0$ luego tenemos una indeterminación.

Para los límites de matemáticas 5 se debe seguir los siguientes pasos.

a. *Buscamos un límite (valor) probable,* usamos dos trayectorias usuales las rectas $y=m(x-x_0)-y_0$ donde (x_0,y_0) es el punto a donde tiende y la otra son parábolas si se tiende al punto (0,0) entonces $y=mx^2$. Otra trayectoria está permitida. Recuerde que el límite es UNICO luego no debe depender de ninguna trayectoria

Usamos rectas $y=mx$, luego $f(x,y=mx)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2mx}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2}\left(\frac{m}{x^2+m^2}\right) = 0$$

b. *Luego podemos suponer que el límite es cero, para ello se comprueba con la definición*. Sin embargo no logramos acotar vea Uds. por qué. Probamos con parábolas $y=mx^2, f(x,y=mx^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2mx^2}{x^4+m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4}\left(\frac{m}{1+m^2}\right) = \left(\frac{m}{m^2+1}\right)$$

Observamos que depende de la “pendiente” de la parábola luego no es único se concluye que no existe el límite.

***.-** Halle el límite siguiente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$$

SOLUCION.

Buscamos un límite probable por rectas $y=mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2m^2x^2}{x^2+m^2x^2+x^2(1-m)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2}\left(\frac{m^2}{1+m^2+(1-m)^2}\right) = 0$$

Luego lo verificamos por la definición de límite

$$|(x,y)-(0,0)|<\delta \quad => \quad |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

Entonces

$$|f(x,y)-L| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}-0\right| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}\right| = \frac{|x^2y^2|}{|x^2+y^2+(x-y)^2|}$$

Ya que tratamos de buscar una expresión máxima para acotarlo, se debe maximar el numerador y minimizar el denominador, se tiene

$$x^2 < x^2+y^2 < x^2+y^2+(x-y)^2$$

Luego

$$|f(x,y)-L| < \frac{x^2y^2}{x^2} < \varepsilon \quad => \quad y^2 < \varepsilon$$

De la definición $|(x,y)-(0,0)|<\delta$, esto corresponde a un círculo centro en (0,0) de radio δ. Entonces sabemos

$$x^2+y^2<\delta^2 \quad => \quad y^2 < x^2+y^2 < \delta^2$$

$$y^2 < \delta^2 < \varepsilon \quad => \quad \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

Luego la definición verifica que ese es el límite de la función

*.- Verifique el límite es correcto.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy} = -\frac{2}{3}$$

SOLUCION.

Sabemos unas cuantas desigualdades para acotar, proveniente de la definición.

$$x^2+y^2<\delta^2 \quad => \quad \begin{cases} x^2 < x^2+y^2 < \delta^2 \quad => \quad |x|<\delta \\ y^2 < x^2+y^2 < \delta^2 \quad => \quad |y|<\delta \end{cases}$$

Verificamos la definición.

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon \quad => \quad \left|\frac{x^2-2}{3+xy}+\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3x^2-6+6+2xy}{9+3xy}\right| = \left|\frac{3x^2+2xy}{3(3+xy)}\right|$$

Luego maximizamos el numerador

$$|3x^2+2xy| \le 3|x^2|+2|x||y| < 3\delta^2+2\delta\delta < 5\delta^2$$

Minimizamos el denominador.

$$|3+xy| \le 3+|x||y| < 3+\delta^2 \quad => \quad -3-\delta^2 < |3+xy| < 3+\delta^2$$

$$-3-\delta^2 < |3+xy| < 3+\delta^2 \text{ se puede acotar } -3-\delta^2 < 3-\delta^2 < |3+xy| < 3+\delta^2$$

Luego $\delta < \sqrt{3}$

Por lo tanto, se acota la función

$$|f(x,y) - L| < \frac{5\delta^2}{3(3-\delta^2)} < \varepsilon \quad => \quad 5\delta^2 < 3\varepsilon(3-\delta^2) \;\; => \;\; \delta^2 < \frac{9\varepsilon}{5+3\varepsilon}$$

Por lo tanto

$$\delta_{min} = \left\{ \sqrt{3}, \sqrt{\frac{9\varepsilon}{5+3\varepsilon\varepsilon}} \right\}$$

El límite existe.

1.- Determine el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x^2y^2}{(x-1)^2 + y^2}$$

SOLUCION.

Buscamos límite probable por recta, $y = m(x-1)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x^2(m^2(x-1)^2)}{(x-1)^2 + m^2(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2(x-1)^2 + x^2m^2(x-1)^2}{(x-1)^2(1+m^2)}\right)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2(x-1)^2}{(x-1)^2}\left(\frac{1+m^2}{1+m^2}\right) = 1$$

Verificamos mediante la definición de límite.

Para el punto (1,0),

$$|(x,y) - (1,0)| < \delta \quad => \quad (x-1)^2 + y^2 < \delta^2 \;\; => \begin{cases} (x-1)^2 < (x-1)^2 + y^2 < \delta^2 \\ y^2 < (x-1)^2 + y^2 < \delta^2 \end{cases}$$

Buscamos acotar ahora $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

$$\left|\frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x^2y^2}{(x-1)^2 + y^2} - 1\right| = \left|\frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x^2y^2 - (x-1)^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2}\right|$$

$$\left|\frac{x^2(x-1)^2 + y^2(x^2-1) - (x-1)^2}{(x-1)^2 + y^2}\right| = \left|\frac{(x^2-1)(x-1)^2 + y^2(x^2-1)}{(x-1)^2 + y^2}\right|$$

$$\left|\frac{(x^2-1)(y^2 + (x-1)^2)}{(x-1)^2 + y^2}\right| = |x^2 - 1| = |x-1||x+1|$$

Sabemos que $|x-1|<\delta$, ahora acotamos el término $|x+1|$

$$-\delta < x-1 < \delta \;\; => \;\; -\delta+2 < x+1 < \delta+2 \;\; => \;\; -\delta-2 < x+1 < \delta+2$$

$$|x+1| < \delta+2$$

$$|f(x,y)-L| = |x-1||x+1| < \boldsymbol{\delta(\delta+2)} < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Hemos hallado la relación épsilon – delta luego el limite existe.

2.- Determine el límite de la función, en el punto (0,0).

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{yx^2\sin(x)}{x^2+y^2} & si \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

SOLUCION.

Probamos en primer lugar rectas de ecuación $y = mx$ ya que pasa por el punto (0,0), se tiene que

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{mxx^2\sin(x)}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2}\frac{msin(x)}{1+m^2} = 0$$

Luego el límite probable será 0, verificamos por la definición de límite la veracidad.

$$|(x,y)-(0{,}0)| < \delta \;\; => \;\; |f(x,y)-0| < \varepsilon$$

Entonces

$$|f(x,y)-L| = \left|\frac{yx^2\sin(x)}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{yx^2\sin(x)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|yx^2\sin(x)|}{x^2+y^2} < \varepsilon$$

Acotamos la expresión anterior por lo que recordemos MAXIMAR el numerador y MINIMIZAR el denominador.

Se tiene que para el denominador:

$$x^2 < x^2+y^2$$

Por lo que

$$\frac{|yx^2\sin(x)|}{x^2+y^2} < \frac{|yx^2\sin(x)|}{x^2} < |y\sin(x)|$$

Ahora maximizamos

Como $x \to 0$ se cumple que $\sin(x) \approx x$ por lo que escribimos

$$|y\sin(x)| < |yx| = |x||y|$$

De la definición de delta, sabemos:

$$x^2+y^2 < \delta^2 \;\; => \;\; \begin{cases} x^2 < x^2+y^2 < \delta^2 & => \;\; |x| < \delta \\ y^2 < x^2+y^2 < \delta^2 & => \;\; |y| < \delta \end{cases}$$

Por lo que podemos finalizar

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon \;\; => \;\; \delta\delta<\varepsilon \;\; => \;\; \boldsymbol{\delta}=\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Se demuestra el límite.

3.- Demuestre la veracidad del límite.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2y+y^2x=6$$

Solución.

Vamos a la definición de límite

$$|(x,y)-(1,2)|<\delta \;\; => \;\; |f(x,y)-6|<\varepsilon$$

Acotamos la sección de épsilon.

$$|x^2y+y^2x-6|<\varepsilon$$

De la definición de delta se tiene que

$$(x-1)^2+(y-2)^2<\delta^2 \;\; => \;\; \begin{cases}(x-1)^2<(x-1)^2+(y-2)^2<\delta^2 \;\; => \;\; |x-1|<\delta \\ (y-2)^2<(x-1)^2+(y-2)^2<\delta^2 \;\; => \;\; |y-2|<\delta\end{cases}$$

Por lo que debemos buscar de alguna forma los términos $|x-1|$ y $|y-2|$

Haciendo un cambio de variable adecuado, tenemos

$$x=x-1+1 \qquad y \qquad y=y-2+2$$

Queda

$$|(x-1+1)^2(y-2+2)+(y-2+2)^2(x-1+1)-6|<\varepsilon$$

Realizando el producto notable y distributivo y así mismo mantenemos las expresiones que queremos nos queda

$$|((x-1)^2+2(x-1)+1)(y-2+2)+((y-2)^2+4(y-2)+4)(x-1+1))\;-6|<\varepsilon$$

$$|(x-1)^2(y-2)+2(x-1)^2+2(x-1)(y-2)+4(x-1)+(y-2)+2+(y-2)^2(x-1)+(y-2)^2+4(y-2)(x-1) \\ +4(y-2)+4(x-1)+4-6|<\varepsilon$$

De la desigualdad triangular y utilizando la acotación de delta tenemos

$$\delta^2\delta+2\delta^2+2\delta\delta+4\delta+\delta+\delta^2\delta+\delta^2+4\delta\delta+4\delta+4\delta<\varepsilon$$

$$2\delta^3+9\delta^2+13\delta<\varepsilon$$

Queda verificado el limite.

4.- Halle el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3y^3 + y^4 + x^5y}{(x + y^2)^3}$$

Solución.

Probando con rectas que pasan por el punto o parábolas de distintas escalas todas dan un limite probable 0. Sin embargo no podemos acotar la función. Deberíamos buscar una trayectoria tal que se pueda demostrar que el limite es distinto.

Sea $y = mx^{\frac{3}{4}}$ se tiene que

$$\lim_{\left(x,y=mx^{\frac{3}{4}}\right)\to(0,0)} \frac{4x^3m^3x^{\frac{9}{4}} + m^4x^3 + x^5mx^{\frac{3}{4}}}{\left(x + m^2x^{\frac{3}{2}}\right)^3} => \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} \frac{4m^3x^{\frac{9}{4}} + m^4 + x^{\frac{11}{4}}m}{\left(1 + m^2x^{\frac{1}{2}}\right)^3} = m^4$$

Luego dependerá de la escala de la trayectoria y el limite no es igual. Por lo que concluimos que NO EXISTE.

5.- Halle lo que se pide, sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x\cos(y) & si \quad y \geq x^2 \\ \quad 0 & si \;\; y < x^2 \end{cases}$$

a.- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$ b.- $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}},\frac{\pi}{4}\right)} f(x,y)$ c.- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Solución.

Para la parte (a) es trivial debido a que el punto no cae en el cambio de la definición de la función a trozos. Por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x\cos(y) = \cos(2)$$

En cuanto a la parte (b) y (c) tenemos problemas, porque la función cambia su definición, luego probamos con rectas de ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ dado a que la frontera que define la función es de ecuación $y = x^2$ los puntos sobre ella son de la forma (x_0, x_0^2) por lo que

$$y = m(x - x_0) + x_0^2$$

Aplicando la recta para determinar el limite se tiene que

$$\lim_{x\to x_0} f(x, m(x - x_0) + x_0^2) = \lim_{x\to x_0} \begin{cases} 0 & si \;\; x > x_0 \\ x\cos(m(x - x_0) + x_0^2) & x < x_0 \end{cases}$$

Si evaluamos los limites laterales tendremos que

$$0 = x_0\cos(x_0^2)$$

Por lo que tenemos varios casos posibles

$$(1)\ \ x_0 = 0 \qquad (2)\ x_0^2 = (2n+1)\frac{\pi}{2} => \ |x_0| = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$$

Por lo que podemos decir que (b) el limite NO EXISTE.

Para en cuanto a (c) el límite PROBABLE es 0 por lo que ahora debemos verificar por definición.

Vamos a la definición de límite

$$|(x,y)-(0,0)| < \delta \ \ => \ \ |f(x,y)-0| < \varepsilon$$

Vamos con ambas definiciones de la función.

$$\left|\begin{matrix} x\cos(y)-0 & si\ \ y \geq x^2 \\ 0-0 & si\ \ y < x^2 \end{matrix}\right| < \varepsilon \quad => \quad \left|\begin{matrix} x\cos(y) \\ 0 \end{matrix}\right| < \varepsilon$$

De la segunda línea se tiene que

$$0 < \varepsilon$$

Lo cual es correcto y se cumple la condición de la definición de limite

Para la primera línea tenemos

$$|x\cos(y)| < \varepsilon \ \ => \ \ |x||\cos(y)| < \varepsilon \ \ => \ \ |x| < \varepsilon$$

De la definición de delta se tiene que

$$|x| < \delta$$

Por lo que concluimos

$$\delta < \varepsilon$$

El limite si existe y es 0. Para (b)

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 20-01-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Determine la función $g(x,y)$ para que f sea continua en el punto.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+2x^2+2y^2+y^4}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ g(x,y) & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

SOLUCION

Para que la función sea continua se debe cumplir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+2x^2+2y^2+y^4}{x^2+y^2}=g(x,y)$$

¿Por qué?

Buscamos límite probable por recta $y=mx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2+2m^2+m^4x^2}{1+m^2}=\frac{2+2m^2}{1+m^2}=2$$

Verificamos por definición.

Acotamos. $|f(x,y)-L|<\varepsilon$

$$\left|\frac{x^4+2x^2+2y^2+y^4}{x^2+y^2}-2\right|=\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right|$$

Tenemos que

$$|x^4+y^4|=|(x^2)^2+(y^2)^2|<|(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2|=|2(x^2+y^2)^2|$$

Luego

$$|f(x,y)-L|<\left|\frac{2(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}\right|=|2(x^2+y^2)|<2\delta^2<\varepsilon\ \ =>\ \ \delta=\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

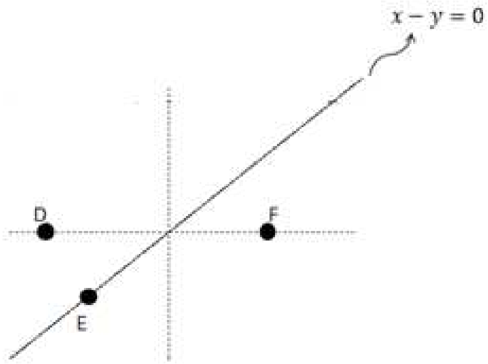
El límite es correcto luego se hace, para que la función sea continua.

$$g(x,y)=2$$

2.- Es la función continua en la región.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & si \quad x < y \\ x^2 & si \quad x \geq y \end{cases}$$

SOLUCION



La función es continua para las regiones fuera de la recta ya que son polinomios.

La recta presenta cambio de definición luego debemos probar para un punto E genérico

$$E\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

Se debe cumplir que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} f(x,y) = f(x_0,x_0) = x_0^2$$

Se tiene entonces, debemos acotar

$$|f(x,y) - x_0^2| = \begin{cases} |xy - x_0^2| & si \quad x < y \\ |x^2 - x_0^2| & si \quad x \geq y \end{cases}$$

Por otra parte $|(x,y) - (x_0,x_0)| < \delta \quad => \quad (x - x_0)^2 + (y - x_0)^2 < \delta^2$

$$=> \begin{cases} (x - x_0)^2 < \delta^2 \\ (y - x_0)^2 < \delta^2 \end{cases}$$

Para buscar la acotación podemos reemplazar $x \; e \; y$ por,

$$x = x - x_0 + x_0 \; ; y = y - x_0 + x_0$$

$$|f(x,y) - x_0^2| = \begin{cases} |(x - x_0 + x_0)(y - x_0 + x_0) - x_0^2| & si \quad x < y \\ |(x - x_0 + x_0)^2 - x_0^2| & si \quad x \geq y \end{cases}$$

Desarrollamos manteniendo $(x - x_0) y \; (y - x_0)$

$$= \begin{cases} |(x - x_0)(y - x_0) + x_0(x - x_0) + x_0(y - x_0) + x_0^2 - x_0^2| & si \quad x < y \\ |(x - x_0)^2 + 2x_0(x - x_0) + x_0^2 - x_0^2| & si \quad x \geq y \end{cases}$$

Usando las acotaciones

$$|f(x,y) - x_0^2| < \begin{cases} |\delta\delta + x_0\delta + x_0\delta| & si \quad x < y \\ |\delta^2 + 2x_0\delta| & si \quad x \geq y \end{cases} < \begin{cases} \delta^2 + 2x_0\delta & si \; x < y \\ \delta^2 + 2x_0\delta & si \; x \geq y \end{cases}$$

Luego

$$\delta^2 + 2x_0\delta = e$$

El limite si existe y por lo tanto la función es Continua.

3.- Determine si la función es continua

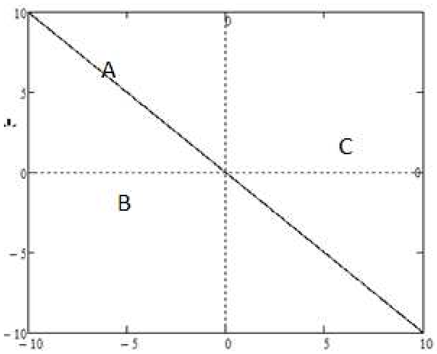
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y} & si \quad x+y\neq 0\\ 1 & si \quad x+y=0\end{cases}$$

SOLUCION.

Para que una función sea continua se debe cumplir

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

Luego veamos la región o condición de la función a trozo.



Para la región B,C, la función es continua ya que es un cociente donde el denominador no es cero. Para la recta $y=-x$ la función es continua ya que es constante (1), pero para puntos (x_0,x_0) el limite puede cambiar. Para verificar continuidad se debe cumplir que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} f(x,y)=f(x_0,-x_o)$$

Entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} f(x,y)=1$

Nos vamos por rectas de ecuación $y+x_0=m(x-x_0)$

$$f(x,y=m(x-x_0)-x_0)=\begin{cases}\dfrac{(x+x_0)-m(x-x_0)}{(x-x_0)(1+m)} & si\, m\neq -1\\ 1 & si \quad m=-1\end{cases}$$

Podemos simplificar un poco más haciendo $x=x-x_0+x_0$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-x_0)(1-m)+2x_0}{(x-x_0)(1+m)} & si \quad m\neq -1\\ 1 & si\, m=-1\end{cases}$$

Observamos

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(1-m)+2x_0}{(x-x_0)(1+m)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1-m}{1+m}+\frac{2x_0}{(x-x_0)(1+m)}\right)$$

Tenemos que si $x_0=0$, el límite no existe ya que depende de m. y para $x_0\neq 0$ el limite tampoco existe luego concluimos que la función NO ES CONTINUA en la recta de ecuación $y=-x$.

4.- Determine si la función es continua y diferenciable.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

SOLUCION.

Pruebe Uds. que la función es continua.

Para probar si la función es diferenciable debemos verificar este limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\langle\nabla f(x_0,y_0),\binom{x-x_0}{y-y_0}\rangle}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

Para ello buscamos el gradiente que por definición es

$$\nabla f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\\ \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}\end{pmatrix}$$

Buscamos en el punto (0,0)

$$\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(0-0)}{h}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

Probamos la diferenciabilidad de f.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-0-\langle\binom{0}{0},\binom{x}{y}\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

OJO, recuerde que la función es a trozo luego deberíamos evaluar el límite para cada una de las partes de la función, ya que la segunda línea de la función es 0 entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0-\langle\binom{0}{0},\binom{x}{y}\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

Este límite no existe ¿Por qué?, luego la función NO es Diferenciable.

5.- Es la función diferenciable en el punto.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

SOLUCION

Debemos verificar el límite para demostrar que es diferenciable.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\langle\nabla f(x_0,y_0),\binom{x-x_0}{y-y_0}\rangle}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

Buscamos el gradiente

$$\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$$

Luego

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-0-\langle\binom{0}{0},\binom{x}{y}\rangle}{\sqrt{(x)^2+(y)^2}}\ =>\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y^2}{x^4+y^4\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pruebe que el límite no existe luego no es diferenciable la función.

6.- Es la función diferenciable en el punto.

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2} & si\ \ (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

SOLUCION

Ya que el límite en 3D debemos verificar

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}\frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)-\left\langle\nabla f(x_0,y_0,z_0),\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}\right\rangle}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

Buscamos el gradiente

$$\nabla f(0,0,0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Entonces

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{(x)^2+(y)^2+(z)^2}} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Evaluamos los límites de rectas

$$eje\ x \ \ => \ y=z=0 \ \ ; \ eje\ \ y \ \ => \ \ x=z=0 \ \ ; \ eje\ z \ => x=y=0$$

Se tiene que $\begin{cases} eje\ x & limite = 0 \\ eje\ y & limite = 0 \\ eje\ z & limite = 0 \end{cases}$, luego un límite probable es 0. Verificamos por definición.

De la definición $|(x,y,z)-(0,0,0)| < \delta$ tenemos, las siguientes acotaciones

$$\begin{cases} x^2 < (x^2+y^2+z^2) < \delta^2 \\ y^2 < (x^2+y^2+z^2) < \delta^2 \\ z^2 < x^2+y^2+z^2 < \delta^2 \end{cases}$$

Acotamos.

$$|f(x,y,z)-L| = \left|\frac{xyz^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| < \varepsilon$$

Maximizamos el numerador

$$|xyz^2| = |x||y|z^2 < \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x^2+y^2+z^2)$$

$$|f(x,y,z)-L| = \left|\frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| < \left|\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|$$
$$= \left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right|$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} < \boldsymbol{\delta} < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Si es diferenciable.

7.- Determine si es continua la función.

$$f(x,y) = \begin{cases} |xy| & si\ \ y \geq x^2-1 \\ 0 & si\ \ y < x^2-1 \end{cases}$$

Solución.

Sobre la parábola que define el cambio de definición de la función f tenemos que evaluar el límite de la continuidad

$$y = x^2 - 1$$

Para cualquier punto de coordenadas (x_0, y_0) sobre esta parábola se cumple que: $(x_0, x_0^2 - 1)$

Por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0^2-1)} |xy| = \left|x_0(x_0^2 - 1)\right|$$

Se tiene que demostrar este límite por lo que se tiene que, acotar: $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

$$\left\{\left|\begin{matrix} |xy| - \left|x_0(x_0^2-1)\right| & si\ \ y \geq x^2 - 1 \\ 0 - \left|x_0(x_0^2-1)\right| & si\ \ y < x^2 - 1 \end{matrix}\right| < \varepsilon\right.$$

Para que el límite por lo menos no tenga incongruencia matemática se debe cumplir que (segunda línea)

$$x_0(x_0^2 - 1) = 0 \quad => \quad x_0 = 0 \quad o \quad x_0 = \pm 1$$

Por lo que debemos acotar:

$$|xy| < \varepsilon$$

Sabemos de la definición de delta que: $(x - x_0)^2 + \left(y - (x_0^2 - 1)\right)^2 < \delta^2 \quad => \quad \begin{cases} |x - x_0| < \delta \\ \left|y - (x_0^2 - 1)\right| < \delta \end{cases}$

Entonces debemos buscar estas expresiones, realizando un cambio de variable.

$$\begin{cases} x = x - x_0 + x_0 \\ y = y - (x_0^2 - 1) + (x_0^2 - 1) \end{cases}$$

Sustituyendo en la definición de épsilon.

$$\left|(x - x_0 + x_0)(y - (x_0^2 - 1) + (x_0^2 - 1))\right| < \varepsilon$$

Desarrollamos el producto manteniendo las relaciones que nos interesa:

$$\left|(x - x_0)\left(y - (x_0^2 - 1)\right) + (x - x_0)(x_0^2 - 1) + x_0\left(y - (x_0^2 - 1)\right) + x_0(x_0^2 - 1)\right| < \varepsilon$$

Recordemos que $x_0(x_0^2 - 1) = 0$ para que exista limite

$$\left|(x - x_0)\left(y - (x_0^2 - 1)\right) + (x - x_0)(x_0^2 - 1) + x_0\left(y - (x_0^2 - 1)\right)\right| < \delta\delta + \delta(x_0^2 - 1) + \delta x_0 < \varepsilon$$

$$\delta^2 + \delta(x_0^2 + x_0 - 1) = \varepsilon$$

Por lo que el límite existe SOLAMENTE cuando $x_0 = 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 0$ del resto la función es DISCONTINUA.

Dado a que existe un Valor Absoluto que cambia de definición en las rectas $x = 0 \ \ y \ \ y = 0$ debemos evaluar su continuidad en estas rectas.

Para $x = 0$, se tiene los puntos $(0, y_0)$, por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} |xy| = 0$$

Por definición. De límite.

$$x^2 - (y - y_0)^2 < \delta^2 \quad => \begin{cases} |x| < \delta \\ |y - y_0| < \delta \end{cases} \quad ; \quad \big||xy| - 0\big| < \varepsilon \quad => |xy| < \varepsilon$$

Realizando cambio de variable $y = y - y_0 + y_0$ se tendrá

$$|x(y - y_0 + y_0)| = |x(y - y_0) + xy_0| < \delta^2 + y_0\delta < \varepsilon$$

Luego está acotada el límite es correcto es continua la función.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 27-01-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Determine si la función es continua y diferenciable.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si\ \ (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución.

Para probar la continuidad se debe cumplir que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Por lo que vamos a la definición de límites para comprobar la veracidad del mismo

Acotamos. $|f(x, y) - L| < \varepsilon$

$$\left|\frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}\right| < \varepsilon \ \ => \ \ \left|\frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\right| < \left|\frac{x(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\right| = |x| < \varepsilon \ \ => \ \ \delta = \varepsilon$$

La función es continua, luego hallemos las derivadas parciales para así determinar el gradiente de la función.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0,0)}{h} = \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h) - f(0,0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - 0 - \langle \binom{1}{0}, \binom{x}{y} \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ => \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ => \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} - x & si\ \ (x, y) \neq (0,0) \\ -x \quad si\ \ (x, y) = (0,0) \end{cases}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Realizando algebra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\begin{cases} -\dfrac{2xy^2}{x^2 + y^2} & si\ \ (x, y) \neq (0,0) \\ -x \quad si\ \ (x, y) = (0,0) \end{cases}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ => \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \begin{cases} -\dfrac{2xy^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} & si\ \ (x, y) \neq (0,0) \\ -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & si\ \ (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Evaluamos por rectas el límite probable. Rectas de ecuación $y = mx$

$$\lim_{x\to 0}\begin{cases} -\dfrac{2m^2x^3}{x^2(1+m^2)x\sqrt{1+m^2}} \\ -\dfrac{x}{x\sqrt{1+m^2}} \end{cases} => \lim_{x\to 0}\begin{cases} -\dfrac{2m^2}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{1}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}} \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{2m^2}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{1}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

Se concluye que el limite no es único ya que depende de la pendiente de la recta por lo cual el limite no existe.

***.-** Determine el gradiente de$h$, donde $h = f0g$

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x^3y + y^2 \\ y^3x \end{pmatrix} \quad ; \quad f(u,v) = u^2 + \sin(v)$$

SOLUCION.

Observamos $g: R^2 \to R^2$, $f: R^2 \to R$, luego la composición es posible

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} u = x^3y + y^2 \\ v = y^3x \end{pmatrix} \xrightarrow{f} u^2 + \sin(v) \quad => \quad h = f\big(g(x,y)\big)$$

Luego el gradiente de h será

$$\nabla h = \nabla f\big(g(x,y)\big)\nabla g(x,y)$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y & x^3 + 2y \\ y^3 & 3y^2x \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla f(u,v) = (2u \quad \cos(v))$$

$$\nabla h(x,y) = (2u \quad \cos(v))_{\substack{u=x^3y+y^2 \\ v=y^3x}} \begin{pmatrix} 3x^2y & x^3 + 2y \\ y^3 & 3y^2x \end{pmatrix}$$

$$\nabla h(x,y) = (2(x^3y + y^2) \quad \cos(y^3x)) \begin{pmatrix} 3x^2y & x^3 + 2y \\ y^3 & 3y^2x \end{pmatrix}$$

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x^3y + y^2)(3x^2y) + \cos(y^3x)\, y^3 \\ 2(x^3y + y^2)(x^3 + 2y) + \cos(y^3x)(3y^2x) \end{pmatrix}$$

2.- Sean $f: R^2 \to R^2$ y $g: R^3 \to R^2$ dos campos vectoriales definidos por

$$f(x,y) = (e^{x+2y}, \sin(y+2x))$$

$$g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2)$$

a. Halle las diferenciales $Df(x,y)$ y $Dg(u,v,w)$
b. Halle la diferencial de $Dh(1,-1,1)$ para la función $h(u,v,w) = f\big(g(u,v,w)\big)$

Solución.

a.- $Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2\cos(y+2x) & \cos(y+2x) \end{pmatrix}_{2x2}$; $Dg(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 4v & 9w^2 \\ -2u & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$

b.- Se tiene que:

$$Dh(u,v,w) = Df(x,y) * Dg(u,v,w) \;\; =>$$

$$Dh(u,v,w) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2\cos(y+2x) & \cos(y+2x) \end{pmatrix}_{\substack{x=u+2v^2+3w^3 \\ y=2v-u^2}} \begin{pmatrix} 1 & 4v & 9w^2 \\ -2u & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores correspondiente.

$$Dh(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2\cos(9) & \cos(9) \end{pmatrix}_{\substack{x=6 \\ y=-3}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \;\; => \;\; Dh(1,-1,1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 0 & -6\cos(9) & 18\cos(9) \end{pmatrix}$$

3.- Halle el valor de $\nabla h(0,0)$, donde $h = f\big(g(x,y)\big)$

$$f(u,v,w) = \begin{pmatrix} \tan(u-1) - e^v \\ u^2 - v^2 + w \end{pmatrix} \;\; ; \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \\ \cos(y-x) \\ e^{-y} \end{pmatrix}$$

SOLUCION.

Observamos que: $f\colon\ R^3 \to R^2$; $g: R^2 \to R^3$, luego la composición esta correcta

$$\nabla h(x,y) = \nabla f\big(g(x,y)\big)\nabla g(x,y) \;\; => \;\; \nabla h(0,0) = \nabla f(1,1,1)\nabla g(0,0)$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \sin(y-x) & -\sin(y-x) \\ 0 & -e^{-y} \end{pmatrix} \;\; => \;\; \nabla g(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(u,v,w) = \begin{pmatrix} \sec^2(u-1) & -e^v & 0 \\ 2u & -2v & 1 \end{pmatrix} \;\; => \;\; \nabla f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -e & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene entonces

$$\nabla h(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -e & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;\; => \;\; \nabla h(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4.- Sea $h: R^2 \to R$ tal que se tiene

$$h(x,y) = f\left(g\big(u(x,y)\big) - v(x,y)\right)$$

Con $u(x,y) = xy$; $v(x,y) = x + y$; $g: R \to R$; $f: R \to R$

Si se sabe que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(-1,1) = 3 \ ; \quad \frac{\partial h}{\partial y}(-1,1) = -9 \ ; \quad g(-1) = 0 \ \ y \ f'(0) = 3$$

Calcule $g'(-1)$.

SOLUCION.

Se tiene que

$$R^2 \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{f} R \quad donde \ \ h = f\big(\varphi(x,y)\big) \ \ con \ \varphi(x,y) = g\big(u(x,y)\big) - v(x,y)$$

$$\nabla h(x,y) = \nabla f\left(g\big(u(x,y)\big) - v(x,y)\right)\left[\nabla g\big(u(x,y)\big)\nabla u(x,y) - \nabla v(x,y)\right]$$

$$\nabla h(-1,1) = \nabla f(g(-1) - 0)\left[\nabla g(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]$$

Entonces

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial x}(-1,1)\\ \frac{\partial h}{\partial y}(-1,1)\end{pmatrix} = f'(0)\left[g'(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] \ => \ \begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix} = 3g'(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix} = 3g'(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \ => \quad g'(-1) = 2$$

5.- Sea la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ determinar el plano tangente a la ecuación y es paralelo al plano xz.

SOLUCION.

Sabemos que la normal del plano xz es $\nabla(xz) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, buscamos el gradiente de la función.

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix}2x-2\\2y\\-2z\end{pmatrix}$$

Sabemos que son paralelos entonces se cumple que

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se despejan los valores y se obtiene que

$$x = 1 \ ; \quad y = \frac{k}{2} \ ; \quad z = 0$$

Sustituimos estos valores en la función para hallar el valor de k que se necesita.

$$1 + \frac{k^2}{4} - 2 = 0 \quad => \quad k = \pm 2$$

Luego el punto tangente será $A(1,1,0) \ y \ \ B(1,-1,0)$, luego el plano tangente será

Para A.

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \rangle = 0 \qquad => \quad 2y - 2 = 0 \ \rightarrow \ \boldsymbol{y = 1} \ \in \boldsymbol{R^3}$$

Para B.

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} \rangle = 0 \qquad => \quad 2y + 2 = 0 \ \rightarrow \ \boldsymbol{y = -1} \ \in \boldsymbol{R^3}$$

6.- Sea la función

$$f(x,y) = \cos(y) + x^2 - y^2$$

Determine la ecuación del plano tangente a f y es perpendicular a la recta de ecuación

$$(x,y,z) = (0,1,1) + t(2,0,1)$$

SOLUCION.

Buscamos el gradiente de la función se tiene

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(y) - 2xy \end{pmatrix}$$

Sabemos que el vector director de la recta dada es $\nabla \pi = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nos dice que los vectores son paralelos entonces

$$\begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(y) - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{OJO en este punto.}$$

Recordemos que:

$$z = \cos(y) + x^2 - xy^2 \quad => \quad \cos(y) + x^2 - xy^2 - z = 0$$

Por lo que:

$$\nabla S = \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(y) - 2y \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Dado a que los vectores son PARALELOS. (Mate3 (FlashBACK) $u = \alpha v$)

$$\nabla S = \boldsymbol{\alpha} \nabla \pi \quad => \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(y) - 2y \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{-1} \ \leftarrow \text{"}Tercera\ Ecuacion\text{"}$$

Por lo que

$$\begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(y) - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad => \quad x = -1 \quad y \quad y = 0$$

Buscamos $z = f(-1, 0) \quad => \quad z = 2 \quad => \quad A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es el punto tangente

Luego el plano a la curva de nivel será

$$z - 2 = \left\langle \nabla f(x_p, y_p), \begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix} \right\rangle \quad => \quad \boldsymbol{z = -2x}$$

7.- (Parcial 2011 3-4) Halle los puntos de $S = \{(x, y, z) \in R^3 : 2z = 4x^2 + 6y^2\}$ en los cuales el plano tangente es paralelo a $\frac{(1-x)}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{(5-z)}{-4}$ y es perpendicular a $-2x + 2y + 6z = 0$

Solución.

$f(x, y) := 2x^2 + 3y^2 \qquad z = f(x, y)$

Sabemos que el plano tiene normal $\quad n := (-2 \ \ 2 \ \ 6)$

Y la recta tiene vector director $\quad l := (2 \ \ 3 \ \ 4)$

El plano tangente a $f(x, y)$ es paralelo a la recta (vectores perpendiculares) y el perpendicular al plano (vectores perpendiculares). Se busca entonces un vector que sea perpendicular a l y n al mismo tiempo esto es producto cruz.

$$N := n^T \times l^T \rightarrow \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad N := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego este vector debe paralelo al gradiente de f(x,y)

$$\mathrm{gradf}(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y) \\ \frac{d}{dy} f(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4\cdot x \\ 6\cdot y \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$\begin{pmatrix} 4x \\ 6y \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

De (3) $\lambda = 1$

De (1) $x = \frac{-1}{4}$

De (2) $y = \frac{1}{3}$

Buscamos el valor de z. $z := f\left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \frac{11}{24}$

Formamos el plano.

$$z - \frac{11}{24} = \blacksquare < \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + \frac{1}{4} \\ y - \frac{1}{3} \end{pmatrix} > \blacksquare$$

$$z - \frac{11}{24} = -x - \frac{1}{4} + 2y - \frac{2}{3}$$

Implica

$$z = 2y - x - \frac{11}{24}$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 3-02-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

***.-** Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^4}{x^4+y^6} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i. $\forall d=\binom{d_1}{d_2}$, $\|d\|=1$, existe en $(0,0)$ la derivada d f en dirección d.

ii. f no es diferencial $(0,0)$.

SOLUCION.

i.- Se tiene que $f(0,0)=0$ y además

$$\lim_{t\to 0}\frac{\left[f\binom{td_1}{td_2}=\dfrac{td_1(td_2)^4}{(td_1)^4+(td_2)^6}\right]-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^5d_1d_2^4}{t^4(d_1^4+t^2d_2^6)}}{t}$$

Observamos que $d_1\neq 0$ entonces

$$\lim_{t\to 0}\quad=\begin{cases}\dfrac{d_1d_2^4}{d_1^4} & si\ \ d_1\neq 0\\ 0 & si\ \ d_1=0\end{cases}$$

Mosca para $d_1=0$ debe buscar el límite en el comienzo.

Ahora se tiene $\|d\|=1 \quad\to\quad d_1^2+d_2^2=1\ ;\ d_1=0\quad\to\quad d_2=\pm 1.$

ii.- Para demostrar que no es diferencial evaluemos el límite de la función a través de la trayectoria $y^3=mx^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xm^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^4}{x^4(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\frac{m^{\frac{4}{3}}}{1+m^2}\qquad NO\ EXISTE$$

La función no es continua luego no es diferenciable.

1.- Sea $S = \left\{(x, y, z) \in R^3 : \sin(z) - xz + y - \frac{1}{2} = 0\right\}$ y L la intersección de los planos $x - y - z = 1$ y $y + z = 0$. Determine el punto de S en el cual el plano tangente es perpendicular a L, así como la ecuación de dicho plano.

Solución.

$$S(x,y,z) := \sin(z) - x \cdot z + y - \frac{1}{2}$$

Buscamos gradiente.

$$\text{GradS}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}S(x,y,z) \\ \frac{d}{dy}S(x,y,z) \\ \frac{d}{dz}S(x,y,z) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -z \\ 1 \\ \cos(z) - x \end{pmatrix}$$

La intersección de los planos $\pi 1 = x - (y + z) - 1$ $\pi 2 = y + z$

Se tiene que $x = 1$ $z + y = 0$ $y = -z$

El vector director de la recta intersección es: $l := (0, 1, -1)$ el $l := (0, -1, 1)$ tambien es valido

Luego por paralelismo

$$\begin{pmatrix} -z \\ 1 \\ \cos(z) - x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

De (2) $\lambda = 1$

De (1) $z = 0$

De (3) $x = 2$

Buscamos (y) de la ecuacion

$$y = \frac{1}{2}$$

Punto del plano $B := \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

El plano tangente será:

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + \frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix} \right\rangle$$

implica que:

$$y - z + \frac{1}{2} = 0$$

2.- Sea $f: R^2 \rightarrow R$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} & si \;\; x \neq -y \\ 0 & si \;\; x = -y \end{cases}$$

a) Halle la derivada direccional de f en (0,0) según un vector unitario $u = (u_1, u_2)$ tal que $u_1 \neq -u_2$

b) Halle (si existe) las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

c) Es f diferenciable en (0,0)

Solución.

$$f(x,y) := \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3} \qquad \text{if}(x+y \neq 0)$$

$$f1(x,y) := 0 \qquad \text{if } x+y=0$$

A.) Sea $u = (u1, u2)$ la norma del vector será $|u| = \sqrt{u1^2 + u2^2}$ el vector debe ser unitario luego $d = \frac{u}{|u|} = \frac{1}{\sqrt{u1^2+u2^2}}(u1,u2) = (d1,d2)$

Ya que no sabemos si f(x,y) es o no es diferenciable, procedemos a la definición de derivada direccional.

$$\lim_{t \to 0}\left[\frac{f(td1,td2) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{(d1^2+d2^2)}{t\cdot(d1^3+d2^3)} - 0}{t} = \frac{(d1^2+d2^2)}{t^2\cdot(d1^3+d2^3)}\right] = \infty$$

Luego no existe la derivada direccional.

B) $\frac{d}{dx}f(0,0)$ $\qquad$ $\frac{d}{dy}f(0,0)$

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{f(h,0) - f1(0,0)}{h}\right) \to \infty \qquad \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(0,h) - f1(0,0)}{h}\right) \to \infty$$

C) f no es diferenciable por que no existe el gradiente de f (o derivadas parcial)

3.- Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2+y^2) & si\ \ x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+y^2-xy & si\ \ x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

En el punto $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ calcular su valor de derivada f en dirección $d = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2)$.

SOLUCION.

Para $p = (x_a + td_1, y_a + td_2)$ se tiene que

$$\begin{cases} si\ \ t > 0\ \ entonces\ estoy\ dentro\ del\ circulo \\ si\ \ t < 0\ \ entonces\ estoy\ afuera\ del\ circulo. \end{cases}$$

Entonces se tiene

$$f\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + t\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + t\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}}t + \frac{2}{5}t^2\right)\left(1 - \frac{6}{\sqrt{10}}t + t\right) & si \;\; t > 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}}t + \frac{3}{5}t^2 & si \;\; t < 0 \end{cases}$$

Y además $f(A) = \frac{1}{2}$.

Tomamos ahora límite direccional

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left(f\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + t\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + t\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{pmatrix} - f(A) \right)}{t}$$

Debemos tomar límites laterales.

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{-\frac{3}{\sqrt{10}}t + \frac{3}{5}t^2}{t} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{-\frac{6}{\sqrt{10}}t + \frac{9}{10}t^2 - \frac{27}{5\sqrt{10}}t^3 + \frac{2}{5}t^4}{t} = -\frac{6}{\sqrt{10}}$$

Se concluye que el límite no existe por lo cual no hay derivada en esta dirección.

4.- Sea $3x^2 + y^2 + z^2 + 4xz - 3xy - 15 = 0$ define a $z = f(x, y)$ como un función implícita, halle la derivada de z.

SOLUCION

Se tiene por composición

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = f(x, y) \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta} R \quad luego \quad h = \theta o f$$

Donde $\theta(x, y) = 3x^2 + y^2 + z^2 + 4xz - 3xy - 15 = 0$

Por composición $\nabla h = \nabla\theta * \nabla f$, básicamente $\nabla h = (0,0)$

Entonces

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = (\, 6x + 4z - 3y, 2y - 3x, 2z + 4x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6x + 4z - 3y) + (2z + 4x)\frac{\partial f}{\partial x} \\ (2y - 3x) + (2z + 4x)\frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} => \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{6x + 4z - 3y}{2z + 4x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x - 2y}{2z + 4x} \end{cases}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -\frac{6x + 4z - 3y}{2z + 4x} \\ \frac{3x - 2y}{2z + 4x} \end{pmatrix}$$

5.- Cerca del punto $A\left(1,1,-\frac{\pi}{2}\right)$ la ecuación

$$xy + xz + yz + \sin(xyz) + \pi = 0$$

Define una función $z = f(x, y)$ implícitamente. Halle el plano tangente a la grafica si $x_0 = y_0 = 1$.

SOLUCION.

Ya que se trata de una curva de nivel, el plano tangente será

$$z - z_p = \left\langle \nabla f(x_p, y_p), \begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix} \right\rangle$$

Buscamos el gradiente de la función, con derivación implícita, sabemos que

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = f(x, y) \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} R \quad luego \quad h = \varphi o f$$

Luego $Dh = D\varphi * Df$

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = (y + z + yz\cos(xyz)\,, x + z + xz\cos(xyz)\,, x + y + xy\cos(xyz)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Despejamos y tenemos el gradiente de $f(x, y)$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y + z + yz\cos(xyz)}{x + y + xy\cos(xyz)} \\ -\frac{x + z + xz\cos(xyz)}{x + y + xy\cos(xyz)} \end{pmatrix}$$

Evaluamos en el punto A.

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\pi - 2}{4} \\ \frac{\pi - 2}{4} \end{pmatrix}$$

Luego el plano tangente será $\quad z = \frac{\pi-2}{4}(x+y) - \pi + 1$

***.-** La ecuación $u + \ln(u) = xy$ define implícitamente $u = f(x,y)$, si f es diferenciable, halle

$$\frac{\partial f}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

SOLUCION.

Sabemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = f(x,y) \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} R \quad luego \quad h = \varphi o f$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-y \,, -x \,, 1 + \frac{1}{u}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{yu}{u+1} \\ \frac{xu}{u+1} \end{pmatrix}$$

Para la derivada cruzada tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xu}{u+1}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x f(x,y)}{f(x,y)+1}\right)$$

Luego derivamos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\left(\left(f + x\frac{\partial f}{\partial x}\right)(1+f) - xf\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)}{(1+f)^2}$$

Sustituimos lo conocido

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\left(u + \frac{xyu}{u+1}\right)(1+u) - xu\left(\frac{yu}{u+1}\right)}{(1+u)^2} = \frac{\left(u(1+u) + xyu - \frac{xyu^2}{u+1}\right)}{(1+u)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{u}{(1+u)^3}(1 + 2u + u^2 + xy)$$

6.- Halle el desarrollo del polinomio de Taylor alrededor de $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cos(xy)$$

SOLUCION.

Buscamos primero el gradiente de la función

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}(-2x\cos(xy) - y\sin(xy)) \\ e^{-x^2-y^2}(-2y\cos(xy) - x\sin(xy)) \end{pmatrix}$$

Y ahora buscamos la Hessiana evaluada en el punto $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2-y^2}(-2x\cos(xy) - y\sin(xy))\right)$$
$$= e^{-x^2-y^2}(-2x(-2x\cos(xy) - y\sin(xy)) + (-2(\cos(xy) - xy\sin(xy)) - y^2\sin(xy)) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y(-2x\cos(xy) - y\sin(xy)) + \left(2x^2\sin(xy) - (\sin(xy) + xy\cos(xy))\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}e^{-x^2-y^2}(-2y\cos(xy) - x\sin(xy))$$
$$= e^{-x^2-y^2}\left(-2y(-2y\cos(xy) - x\sin(xy)) + (-2(\cos(xy) - yx\sin(xy)) - x^2\cos(xy))\right) = -2$$

Luego $H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

El polinomio de Taylor será

$$f(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2}\langle H(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle$$

Con $\nabla f(0,0) = 0$

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle \Rightarrow f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle$$

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

7.- Hallar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2 + 10$$

SOLUCION.

Buscamos primero que todo el gradiente de la función

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4xy \\ -2x^2 + 2y \end{pmatrix}$$

Para los puntos críticos el gradiente debe ser nulo, se tiene entonces

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4xy \\ -2x^2 + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=>\; \begin{cases} 12x^2 = 4xy \\ y = x^2 \end{cases} \;=>\; 3x^2 = x^3 \;=>$$

$$x^2(x-3) = 0 \;=>\; \begin{cases} x = 0 \;=>\; y = 0 \\ x = 3 \;=>\; y = 9 \end{cases}$$

Entonces se generan los puntos $A(0,0)$ $B(3,9)$

Buscamos la Hessiana para clasificarlos

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 24x - 4y & -4x \\ -4x & 2 \end{pmatrix}$$

Para punto A, $H(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(H(A)) = 0$ $\quad NO\ CONCLUYO$

Para punto B, $H(B) = \begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(H(B)) = 72 - 144 < 0$, luego B es SILLA.

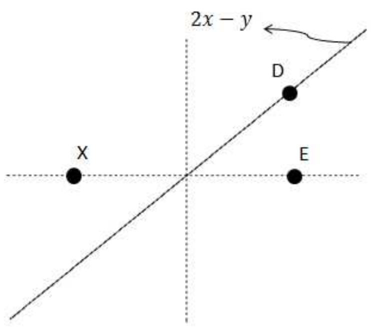
Veamos para el punto A, estudiamos los valores cercanos a (0,0)

$$f(x,y) = 2x^2(2x - y) + y^2 + 10 \;;\; f(0,0) = 10$$

$$f(D) = y^2 + 10 > 10$$

$$F(E) > (0,0) \;\; y \;\; F(X) < (0,0)$$

Luego A es un Punto Silla.



8.- Sea la función $g: R^2 \to R^2$ definido por

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 + v \\ uv \end{pmatrix}$$

La ecuación $(1 + x^2)z + y^2e^z - y = 0$ define $z = f(x,y)$ alrededor del punto $(0,0)$ y sea $h = fog$, halle

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(0,0)$$

SOLUCION.
Suponemos que f es C^2
Sabemos que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} u^2 + v \\ uv \end{pmatrix} \xrightarrow{f} R \quad por\ lo\ cual\ \ h = fog$$

Entonces; $\nabla h(u,v) = \nabla f(x,y)\nabla g(u,v)$

Pero $f(x,y)$es una función implícita

Sabemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{m}{\rightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = f(x,y) \end{pmatrix} \overset{\theta}{\rightarrow} R \quad por\ lo\ cual\ \ l = \theta o m$$

Donde $\theta(x,y,z) = (1+x^2)z + y^2e^z - y = 0$ y además $\nabla l = \nabla\theta\nabla m$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz & 2ye^z - 1 & (1+x^2) + y^2e^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Despejamos

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2xz}{1+x^2+y^2e^z} \\ -\dfrac{2ye^z - 1}{1+x^2+y^2e^z} \end{pmatrix}$$

Ahora

$$\nabla h(u,v) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2xz}{1+x^2+y^2e^z} & -\dfrac{2ye^z-1}{1+x^2+y^2e^z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \end{pmatrix}$$

Recuerde que $x = u^2 + v \quad y \quad y = uv$

Despejamos $\frac{\partial h}{\partial v}$

$$\frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{2xz}{1+x^2+y^2e^z} - \left(\frac{2ye^z-1}{1+x^2+y^2e^z}\right)u \ \ => \ \boldsymbol{\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{-2xz-(2ye^z-1)u}{1+x^2+y^2e^z}}$$

Y ahora derivamos con respecto a u

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-2xz-(2ye^z-1)u}{1+x^2+y^2e^z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} = \frac{\left(\left(-2\left(\frac{\partial x}{\partial u}z + x\frac{\partial z}{\partial u}\right) - 2u\left(\frac{\partial y}{\partial u}e^z + ye^z\frac{\partial z}{\partial u}\right) - (2ye^z-1)\right)(1+x^2+y^2e^z) - \left((-2xz-(2ye^z-1)u)\left(2x\frac{\partial x}{\partial u} + e^z 2y\frac{\partial y}{\partial u} + y^2e^z\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right)\right)}{(1+x^2+y^2e^z)^2}$$

Ya que nos piden $\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(0,0)$, se tiene $x = 0 \ \ y \ \ \ y = 0 \ \ => \ \ z = 0$

Y además $\frac{\partial x}{\partial u} = 2u$; $\frac{\partial x}{\partial u}_{u=0} = 0$; $\frac{\partial y}{\partial u} = 0$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(0,0) = 1$$

9.- Hallar y clasificar los puntos críticos de f.

$$f(x,y) = (x+y)\sin(x-y)$$

Solución

Hallamos el gradiente. $\mathrm{gradF}(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y) \\ \frac{d}{dy} f(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sin(x-y) + \cos(x-y)\cdot(x+y) \\ \sin(x-y) - \cos(x-y)\cdot(x+y) \end{bmatrix}$

Cuando el gradiente es cero se tiene un punto critico.

$$\sin(x-y) + \cos(x-y)\cdot(x+y) = 0 \qquad (1)$$

$$\sin(x-y) - \cos(x-y)\cdot(x+y) = 0 \qquad (2)$$

De (2) $\quad \sin(x-y) = (x+y)\cos(x-y) \qquad (3)$

Sustituimos (3) en (1) $\quad 2(x+y)\cdot\cos(x-y) = 0$

$$(x+y) = 0 \qquad x = -y \qquad (4)$$

$$\cos(x-y) = 0 \qquad x - y = \frac{(2k+1)\pi}{2} \qquad (5)$$

Sustituyendo el resultado (4) en (3)

$\sin(x-y) = 0 \qquad x - y = k\pi$ y además $2x = k\pi \qquad x = \frac{k\pi}{2}$ y $y = \frac{-k\pi}{2}$

Sustituyendo el resultado (5) en (3)

$\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2}\right] = 0$ pero sabemos que $\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2}\right] = (-1)^k$ lo que hay una indeterminación.

Por lo tanto no hay solución por esta rama.. las únicas soluciónes serán

$x = \frac{k\pi}{2} \qquad y = \frac{-k\pi}{2}$ para $k\varepsilon(0,1,2,3,4,...)$

Los puntos críticos serán. $\quad A(k) := \begin{pmatrix} \frac{k\cdot\pi}{2} \\ \frac{-k\cdot\pi}{2} \end{pmatrix}$

Clasificamos los puntos, por Hessiana $\quad H(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2} f(x,y) & \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx} f(x,y)\right) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy} f(x,y)\right) & \frac{d^2}{dy^2} f(x,y) \end{bmatrix}$

$$H(x,y) \rightarrow \begin{bmatrix} 2\cdot\cos(x-y) - \sin(x-y)\cdot(x+y) & \sin(x-y)\cdot(x+y) \\ \sin(x-y)\cdot(x+y) & -2\cdot\cos(x-y) - \sin(x-y)\cdot(x+y) \end{bmatrix}$$

Buscamos determinante en el punto.

$\left|H\left(\frac{k\cdot\pi}{2}, \frac{-k\cdot\pi}{2}\right)\right| \rightarrow -4\cdot\cos(\pi\cdot k)^2 \; < 0$ $\quad$ Luego todos los puntos son SILLAS.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 10-02-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Sea la función $h: R^3 \to R^2$, definida por

$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y+z \\ xyz+xz \end{pmatrix}$$

La función $g: R^2 \to R$ se conoce que es diferenciable tal que $g(1,0)=2\ \ y\ \nabla g(1,0)$ es un vector unitario.

i. Plano Tangente a la superficie de ecuación $f(x,y,z)=2$ en el punto $(0,1,1)$ que intersecta perpendicularmente a la recta de ecuación $(x,y,z)=(0,1,1)+t(2,0,1)$, se sabe además que $f=goh$

ii. Calcular $\nabla g(1,0)$

SOLUCION

i.- Sabemos que el vector director de la recta $v=(2,0,1)$ es paralelo al vector normal de la superficie en el punto dado, entonces

$$\left\langle \nabla f(0,1,1), \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \;\; => \;\; \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \;\; => \;\; 2x+z-1=0$$

ii.- Sabemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{h} \begin{pmatrix} x^2y+z \\ xyz+xz \end{pmatrix} \xrightarrow{g} R^2 \quad => \;\; f=goh$$

Luego $Df(x,y,z)=Dg(u,v)Dh(x,y,z)$

$$\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 1 \\ yz+z & xz & xy+x \end{pmatrix} \; ; \;\; \nabla h(0,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(1,0) & \frac{\partial g}{\partial v}(1,0) \end{pmatrix}$$

Y además sabemos que

$$\nabla f(x,y,z) = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\; => \;\; \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(1,0) & \frac{\partial g}{\partial v}(1,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejando se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \alpha \;\; ; \;\; y\ como\ \|\nabla g(1,0)\| = 1 \;\; => \;\; \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = 1 \;\; => \;\; \alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Concluimos que

$$\nabla g(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad y \quad \nabla g(1,0) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

2.- Se sabe que $g(x,y) = x^2\ f(x, y^2 + x^3)$ tal que $f: R^2 \to R$ es diferenciable, se conoce en $\binom{1}{2}$ el valor de derivada de f en dirección $\binom{0}{1}$ es -1, como también en $\binom{1}{2}$ el valor de la derivada de f en dirección $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ es 2. Por ultimo $f(1,2) = 3$

i.- Determine$\nabla f(1,2)$

ii.- El plano tangente a la gráfica en el punto $(1,1,3)$.

SOLUCION.

1.- Sabemos por las dos condiciones dadas por el problema que

$\forall d;\ \ \|d\| = 1$ y el valor en (1,2) de la derivada en la dirección d es, por condición de que f es diferenciable.

$$\langle \nabla f(1,2), d \rangle = k$$

$$(1)\ \langle \nabla f(1,2), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -1 \qquad (2)\ \ \langle \nabla f(1,2), \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \rangle = 2$$

Como $\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} & \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} \end{pmatrix}$

Se tiene, de (1)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1 \quad y \ \ (2) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2\sqrt{2} + 1$$

Luego

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} + 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ii.- Es una curva de nivel luego, debemos buscar $\nabla g(1,1)$

$$g(x,y) = x^2\ \underbrace{f(x, y^2 + x^3)}_{S(x,y)}$$

Donde

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\ S(x,y) + x^2 \frac{\partial}{\partial x} S(x,y) \\ x^2 \frac{\partial}{\partial y} S(x,y) \end{pmatrix}$$

Debemos entonces buscar las parciales que necesitamos

Sabemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{l} \begin{pmatrix} x \\ y^2 + x^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} R \qquad por\ lo\ cual\ \ S = fol$$

Luego

$$\nabla S(x,y) = Df(u,v)Dl(x,y) \ \ => \ \ \nabla S(1,1) = \nabla f(1,2)\nabla l(1,1)$$

Donde

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} + 1 \\ -1 \end{pmatrix}^t \ ;\ \nabla l(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3x^2 & 2y \end{pmatrix} \ => \ \nabla l(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Realizando la multiplicación

$$\nabla S(1,1) = \begin{pmatrix} -2(1 - \sqrt{2}) \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ahora terminamos el gradiente de $\nabla g(1{,}1)$

$$\nabla g(1{,}1) = \begin{pmatrix} 2(1)\,S(1{,}1) + 1^2 \dfrac{\partial}{\partial x} S(1{,}1) \\ 1^2 \dfrac{\partial}{\partial y} S(1{,}1) \end{pmatrix} \; ; \; S(1{,}1) = f(1{,}2) = 3$$

$$\nabla g(1{,}1) = \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Entonces el plano tangente será

$$z - 3 = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)(x-1) - 2(y-1) \; => \; \boldsymbol{z = 2\left(2+\sqrt{2}\right)x - 2y + 1 - 2\sqrt{2}} \;\; \boldsymbol{RESP}$$

3.- Sea la función definida por

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - y^2 - x^2 y - 4$$

Clasifique los puntos críticos de la función.

SOLUCION

Buscamos el gradiente y veamos donde se anula

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2xy \\ 3y^2 - 2y - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; => \; \begin{cases} x(3x - 2y) = 0 & (1) \\ y(3y-2) - x^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) $\begin{cases} x = 0 \\ 2y = 3x \end{cases}$ sustituyendo en (2)

$$Para\ x = 0 \; => \begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$Para \;\; y = \frac{3}{2}x \;\; => \;\; 3\left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}x\right) - x^2 = 0 \;\; => \frac{23}{4}x^2 - 3x = 0 \;\; => x\left(\frac{23}{4}x - 3\right) = 0 \;\; => \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{12}{23} \end{cases}$$

Entonces formamos los puntos. $A(0{,}0)$ $B\left(0, \frac{2}{3}\right)$ $C\left(\frac{12}{23}, \frac{18}{23}\right)$

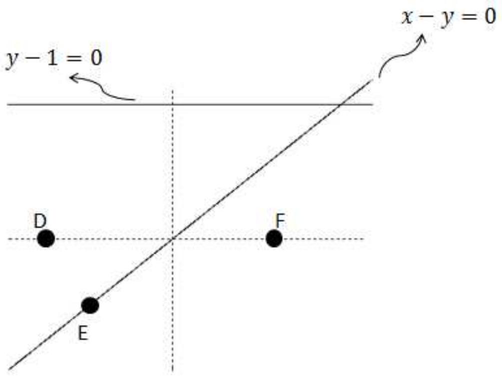
Buscamos la Hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y & -2x \\ -2x & 6y - 2 \end{pmatrix}$$

$$H(B) < 0 \;\; PUNTO\ SILLA \qquad H(C) > 0 \;\; MINIMO \qquad H(A) = 0 \;\; NO\ CONCLUYO$$

Sabemos que $f(A) = -4$, veamos cerca del (0,0)

$$f(x,y) = x^2(x-y) + y^2(y-1) - 4$$



Para todos los puntos, $y - 1 < 0$

Para $f(D) < -4$

Para $f(F) > -4$

Para $f(E) < -4$

Luego A es un PUNTO SILLA.

4.- Clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z) = x - 2y + 3z$$

En la región $D = \{(x,y,z)\colon\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

SOLUCION.

Primero evaluamos en el interior de la región. Para ello veamos el gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

No hay puntos críticos en todo el dominio de f luego en el interior tampoco.

Segundo Evaluamos los puntos críticos en la frontera por medio de los multiplicadores de LaGrange.

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Y por LaGrange.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Despejamos de (1) y sustituimos en (2)

$$x = \frac{1}{2\lambda}\ ;\ \ y = -\frac{1}{\lambda}\ ;\ \ z = \frac{3}{2\lambda}\ \ => \ \ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1\ \ => 1 + 4 + 9 = 4\lambda^2$$

$$\lambda^2 = \frac{7}{2}\ => \ \lambda = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2/7} \\ -\sqrt{2/7} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2/7} \end{pmatrix}\ MAX \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2/7} \\ \sqrt{2/7} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2/7} \end{pmatrix}\ MIN$$

5.- Sea $f: R^2 \to R$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + y^2 & si \;\; x \neq 0 \\ y^2 & si \; x = 0 \end{cases}$$

Es diferenciable en todo R^2?

Solución.

Para demostrar si la función es diferenciable debemos demostrar el limite de diferenciabilidad

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \left\langle \nabla f(x_0,y_0), \binom{x-x_0}{y-y_0} \right\rangle}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

En este caso para los puntos de la forma $(0, y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(0,y_0) - \left\langle \nabla f(0,y_0), \binom{x}{y-y_0} \right\rangle}{\sqrt{(x)^2 + (y-y_0)^2}}$$

Donde, $f(0, y_0) = y_0^2$

Y por definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y_0) - f(0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) + y_0^2 - y_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,y_0+h) - f(0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(y_0+h)^2 - y_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y_0^2 + 2y_0 h + h^2 - y_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hy_0 + h^2}{h} = 2y_0$$

Entonces

$$\nabla f(0, y_0) = (0, 2y_0)$$

Sustituyendo en el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + y^2 & si \;\; x \neq 0 \\ y^2 & si \; x = 0 \end{cases} - y_0^2 - \left\langle \binom{0}{2y_0}, \binom{x}{y-y_0} \right\rangle}{\sqrt{(x)^2 + (y-y_0)^2}}$$

Queda

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + y^2 & si \;\; x \neq 0 \\ y^2 & si \; x = 0 \end{cases} - y_0^2 - 2y_0 y + 2y_0^2}{\sqrt{(x)^2 + (y-y_0)^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + y^2 - 2y_0 y + y_0^2}{\sqrt{(x)^2 + (y-y_0)^2}} & si \;\; x \neq 0 \\ \dfrac{y^2 - 2y_0 y + y_0^2}{\sqrt{(x)^2 + (y-y_0)^2}} & si \; x = 0 \end{cases} = 0$$

Tratamos de acotar el límite en la definición épsilon-delta ya que por definición debe ser cero.

$$\left| \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + y^2 - 2y_0 y + y_0^2}{\sqrt{(x)^2 + (y-y_0)^2}} \right| < \varepsilon$$

De la definición de delta se tiene

$$x^2 < x^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \quad => \quad |x| < \delta$$

$$(y - y_0)^2 < x^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \quad => \quad |y - y_0| < \delta$$

Por lo que

$$\left|\frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + y^2 - 2y_0 y + y_0^2}{\sqrt{(x)^2 + (y - y_0)^2}}\right| < \left|\frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + (y - y_0)^2}{\sqrt{(x)^2 + (y - y_0)^2}}\right|$$

$$< \left|\frac{x^2 \sqrt{(x)^2 + (y - y_0)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + (x)^2 + (y - y_0)^2}{\sqrt{(x)^2 + (y - y_0)^2}}\right| = \left|x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + \sqrt{(x)^2 + (y - y_0)^2}\right|$$

$$< x^2 + \sqrt{(x)^2 + (y - y_0)^2} < \delta^2 + \delta < \varepsilon$$

La otra rama.

$$\left|\frac{y^2 - 2y_0 y + y_0^2}{\sqrt{(x)^2 + (y - y_0)^2}}\right| = \left|\frac{(y - y_0)^2}{\sqrt{(x)^2 + (y - y_0)^2}}\right| < \left|\frac{x^2 + (y - y_0)^2}{\sqrt{(x)^2 + (y - y_0)^2}}\right| = \sqrt{(x)^2 + (y - y_0)^2} < \delta < \varepsilon$$

Por lo que el limite SI esta acotado y por ello SI existe, la función SI es diferenciable en los puntos $(0, y_0)$

6.- Halle máximos y minios absolutos para $f: A \to R$ definida por $f(x, y) = 3x + 2y$ con $A = \{(x, y) \in R^2 : \ x^2 \le y \le 9$

Solución.

$$f(x,y) := 3x + 2y$$

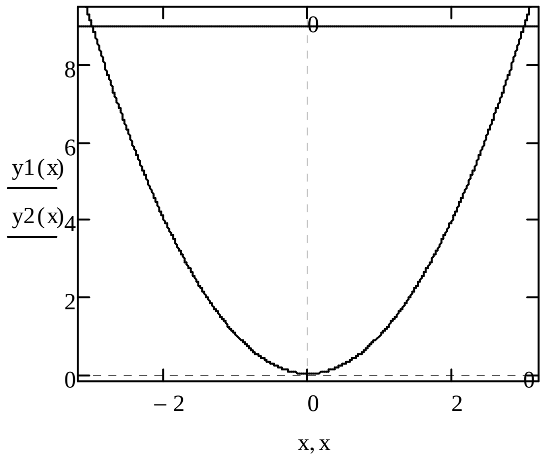
$$\text{gradf}(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y) \\ \frac{d}{dy} f(x,y) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

NO HAY máximo y mínimo porque el grad no es cero NUNCA

Revisamos la frontera primero la identificamos

$x^2 \le y \le 9$ $\qquad$ $y2(x) := x^2$ $\qquad$ $y1(x) := 9$

Graficamos



Dada la desigualdad es la región acotada
Encerrada por las curvas. Parametrizamos

$$y11(x) := \left| \begin{array}{l} 9 \\ -3 \le x \le 3 \end{array} \right.$$

$$y1(x,y) := y - 9$$

$$y22(x) := \left| \begin{array}{l} x^2 \\ -3 \le x \le 3 \end{array} \right.$$

$$y2(x,y) := x^2 - y$$

Para y1(x) Aplicamos el método de LaGrange

$$gradY1(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} y1(x,y) \\ \frac{d}{dy} y1(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por teorema

$$LaGrange(\lambda) := \left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ y - 9 = 0 \end{array} \right.$$

3=0 no tiene sentido luego no hay max o min interno de la regio y11(x). Solo los extremos representan máximo o mínimo, por lo cual tenemos dos puntos.

$$A := \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para y2(x). Aplicamos el método de LaGrange

$$gradY2(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} y2(x,y) \\ \frac{d}{dy} y2(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$LaGrange(\lambda) := \left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} \\ x^2 - y = 0 \end{array} \right.$$

De la segunda línea se tiene $\lambda = -2$ de la primera $x = \frac{-3}{4}$ Buscamos y

$$y2(x) := x^2 \qquad y2\left(\frac{-3}{4}\right) \rightarrow \frac{9}{16}$$

Luego un tercer punto

$$C := \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} \\ \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

Clasificamos $f(3,9) \rightarrow 27$ $\quad f(-3,9) \rightarrow 9$ $\quad f\left(\frac{-3}{4}, \frac{9}{16}\right) \rightarrow -\frac{9}{8}$

MAX(A) MIN(C)

5.- Para la función $f: R^2 \rightarrow R$ dada por

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x^4 + 2y^4$$

a.) Clasifique los puntos críticos de $f(x,y)$.

b.) Calcule los máximos y mínimos globales de $f(x,y)$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$

Solución.

a.- Buscamos el gradiente de la función f

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 4x^3 \\ 2y + 8y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se despeja para obtener

$$(1) \quad 2x(1-2x^2) = 0 \quad => \quad x = 0 \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad (2) \quad 2y(1+4y^2) = 0 \quad => \quad y = 0$$

Los puntos críticos serán

$$A(0,0) \quad B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) \quad C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

Para clasificarlos entonces buscamos la Hessiana.

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2-12x^2 & 0 \\ 0 & 2+24y^2 \end{pmatrix}$$

Evaluamos

$$\det\big(H(0,0)\big) = 4 > 0 \quad a_{11} = 2 > 0 \;\; MINIMO$$

$$\det\left(H\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right) < 0 \;\; SILLA \quad ; \quad \det\left(H\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right) < 0 \quad SILLA$$

b.- Para la restricción dada, tendremos por LaGrange

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x - 4x^3 \\ 2y + 8y^3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

De (1) se tiene $2x(1-\lambda-2x^2) = 0 \quad => \quad (i)\ x = 0 \quad (ii)\ x^2 = \frac{1-\lambda}{2}$

De (2) se tiene $2y(1-\lambda+4y^2) = 0 \quad => \quad (iii)\ y = 0 \quad (iv)\ y^2 = \frac{\lambda-1}{4}$

Sustituyendo (i) en (3), $y^2 = 1 \quad => \quad y = \pm 1$, se forman los puntos $D(0,1)\ \ E(0,-1)$

Sustituyendo (iii) en (3), $x^2 = 1 \quad => \quad x = \pm 1$ se forman los puntos $F(1,0)\ \ G(-1,0)$

Y por ultimo sustituyendo (ii) y (iv) en (3)

$$\frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda-1}{4} - 1 = 0 \quad => \quad 2 - 2\lambda + \lambda - 1 - 4 = 0 \quad => -3 - \lambda = 0 \quad => \quad \lambda = -3$$

Sustituyendo este resultado en (ii) y (iv) no habrá valores reales para "y" por lo que no hay puntos críticos.

Evaluando los puntos D E F y G.

$$f(D) = f(E) = 3 \qquad y \quad f(F) = f(G) = 0$$

Por lo que se concluye $\quad D\ y\ E \quad MAX\ ABS \qquad F\ y\ G\ \ MIN\ ABS$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
PREPARADURIA DE MATEMATICAS
MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 24-02-2012
Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Determine la integral de trayectoria de la función, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ para $\sigma(t) = \binom{e^t}{e^{-t}}$ sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$.

SOLUCION.

Es una integral de trayectoria ya que $f: R^2 \to R$. Entonces tenemos:

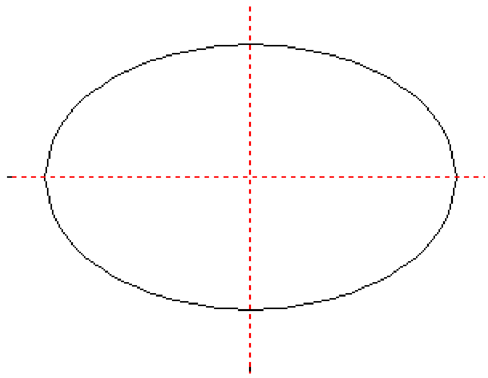
$$\sigma'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \;;\; \|\sigma'(t)\| = \sqrt{e^{2t}+e^{-2t}} \quad y \quad f(\sigma(t)) = \sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}$$

Por definición de integral de trayectoria.

$$\int_0^2 f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|dt = \int_0^2 (e^{2t}+e^{-2t})dt = \left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2}\right)_0^2 = \frac{e^4 - e^{-4}}{2}$$

2.- Sea la curva descrita por $4x^2 + y^2 = 1$, halle la integral de $f(x,y) = x^3 y$

SOLUCION.



Parametrizamos la trayectoria usando trigonometría, se tiene que:

$$(2x)^2 + (y)^2 = 1$$

Sea entonces $2x = \cos(\theta)\,; y = \sin(\theta)$

Tenemos que $\sigma(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta)}{2} \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Es una integral de trayectoria, ya que $f: R^2 \to R$, con $\theta \in [0,2\pi]$.

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(\theta)^3}{8}\sin(\theta)\right)\sqrt{\frac{(\sin(\theta))^2}{4} + (\cos(\theta))^2 d\theta}$$

Cambio de variable $u = \cos(\theta)\;;\; du = -\sin(\theta)\,d\theta: \theta = 0 \;\to u = 1 \;\; \theta = 2\pi \;\to u = 1$

$$\int_1^1 \left(\frac{u^3}{8}\right)\sqrt{\frac{1-u^2}{4} + u^2(-du)} = 0$$

3.- Sea la función definida por, y la trayectoria descrita por, en el intervalo $0 \leq t \leq 1$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}; \quad \sigma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

SOLUCION.

Es una integral de línea ya que $f: R^2 \to R^2$, entonces por definición se tiene

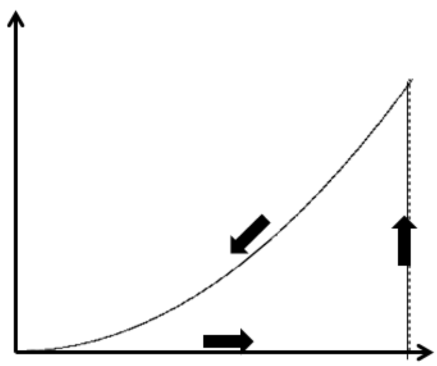
$$\int_0^1 \langle f(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} 3t^4 \\ t^2 - 9t^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6t \end{pmatrix} \rangle \, dt = \int_0^1 (3t^4 + 6t^3 - 54t^5) dt$$

$$I = \frac{3}{5} + \frac{3}{2} - 9$$

4.- Dada la trayectoria $c \nearrow$, tal que $c = \{(x,y) : y = x^2 \; ; \;\; 0 \leq x \leq 1\}$, calcular

$$\int_{c\nearrow} x^2ydx + yxdy$$

Con sentido establecido por la gráfica.



SOLUCION.

Debemos separar la trayectoria como la unión de tres más. Entonces tenemos

Trayectoria C_1.

$$\sigma_1(t) = \begin{pmatrix} x = t \\ y = t^2 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Luego,

$$\int_{C_1\nearrow} \langle F, ds \rangle = \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \rangle \, dt = \int_0^1 3t^4 dt = \frac{3}{5}$$

Observación, la parametrizacion de C_1 va en contra al sentido dado luego

$$\int_{C_1\nearrow} \langle F, ds\rangle = -\frac{3}{5}$$

Trayectoria C_2.

$$\sigma_2(t) = \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = t \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 1$$

Luego

$$\int_{C_2\nearrow} \langle F, ds\rangle = \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

Trayectoria C_3,

$$\sigma_3(t) = \begin{pmatrix} x = t \\ y = 0 \end{pmatrix}; \quad 0 \le t \le 1$$

Luego

$$\int_{C_3\nearrow} \langle F, ds\rangle = \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle\, dt = \int_0^1 0\, dt = 0$$

Se cumple que, $C\nearrow = C_1\nearrow \cup C_2\nearrow \cup C_3\nearrow$

$$\int_{C\nearrow} \langle F, ds\rangle = \int_{C_1\nearrow} \langle F, ds\rangle + \int_{C_2\nearrow} \langle F, ds\rangle \int_{C_3\nearrow} \langle F, ds\rangle \;=>\; \int_{C\nearrow} \langle F, ds\rangle = -\frac{1}{10}$$

5.- Sea $C =$ arco de elipse de ecuación $3x^2 + 4y^2 = 48$ que va de $\binom{2}{3}$ a $\binom{-4}{0}$ seguido del segmento de recta que va de $\binom{-4}{0}$ a $\binom{2}{0}$, y posterior el segmento de recta que va de $\binom{2}{0}$ a $\binom{2}{3}$ calcular.

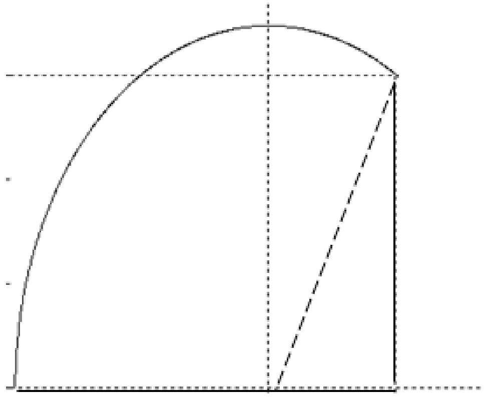
$$\int_{C\nearrow} \left(1 + \frac{4}{3}x\right) y^2 dx + 2xydy$$

SOLUCION.

Sea la función de dos variables definida por

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{4}{3}x\right) y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Y la curva de la forma



Note que el ángulo de apertura al punto (2,3) viene dado por el cambio de variable donde

$$\text{Donde; } x = 4\cos(\theta) \;\; => \;\; x = 2 \;\; => \;\; \frac{1}{2} = \cos(\theta) \quad y = 2\sqrt{3}\sin(\theta) \quad => \;\; y = 3 \;\; => \;\; \frac{3}{2\sqrt{3}} = \sin(\theta)$$

Parametrizamos la curvas, para C_1

$$C_1 = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{48} + \dfrac{4y^2}{48} = 1 \;\; => \;\; \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \\ \text{Y sea } \;\cos(\theta) = \dfrac{x}{4} \;;\; \sin(\theta) = \dfrac{y}{2\sqrt{3}} \quad \text{con } \theta \in (\theta_0, \pi) \end{cases}$$

Se tiene entonces

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 4\cos(\theta) \\ 2\sqrt{3}\sin(\theta) \end{pmatrix} \;\; => \;\; \sigma'_1 = \begin{pmatrix} -4\sin(\theta) \\ 2\sqrt{3}\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Se resuelva la primera integral

$$I_{c1} = \int_{\theta_0}^{\pi} \left\langle \begin{pmatrix} (1 + \frac{4}{3}(4\cos(\theta))(12\sin^2(\theta) \\ 2(4\cos(\theta))\big(2\sqrt{3}\sin(\theta)\big) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4\sin(\theta) \\ 2\sqrt{3}\cos(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle d\theta$$

$$I_{c1} = \int_{\theta_0}^{\pi} \left(-48\left(1 + \frac{16}{3}\cos(\theta)\right)(\sin^3(\theta)) + 96(\sin(\theta))(\cos^2(\theta)) \right) d\theta$$

Integramos

$$I_{c1} = 48\cos(\theta)\sin^2(\theta) - 64\sin^4(\theta)_{\theta_0}^{\pi} = 64\,(\sin(\theta_0))^4 - 48\cos(\theta_0)\,(\sin(\theta_0))^2$$

$$I_{c1} = 64\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - 48\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \;\; => \;\; I_{c1} = 18$$

Para C_2

$$C_2 = \begin{cases} y = 0 \\ -4 \le x \le 2 \end{cases} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; => \;\; I_{C2} = \int_{-4}^{2} 0dx = 0$$

Para C_3

$$C_3 = \begin{cases} x = 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases} \;;\; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \;\; t \in (0,2) \;\; => \sigma'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; F = \begin{pmatrix} \frac{11}{3}t^2 \\ 4t \end{pmatrix}$$

$$I_{C3} = \int_0^3 \langle \begin{pmatrix} \frac{11}{3}t^2 \\ 4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \, dt \;\; = \;\; \int_0^3 4t dt = 2t^2{}_0^3 \; = 18$$

Por lo cual se tiene $I = I_{C1} + I_{c2} + I_{C3} \;\; => \;\; I = 36$

6.- Sea

$$C = \{(x,y) \mid x = -1, -1 \le y \le 0\} \;\; \cup \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1, \qquad -1 \le x \le 0 \; y \ge 0\}$$

y de C denota el recorrido desde el punto (-1,-1) hasta (0,1) calcule

$$\int_{C\uparrow} \left(-y \, dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy \right)$$

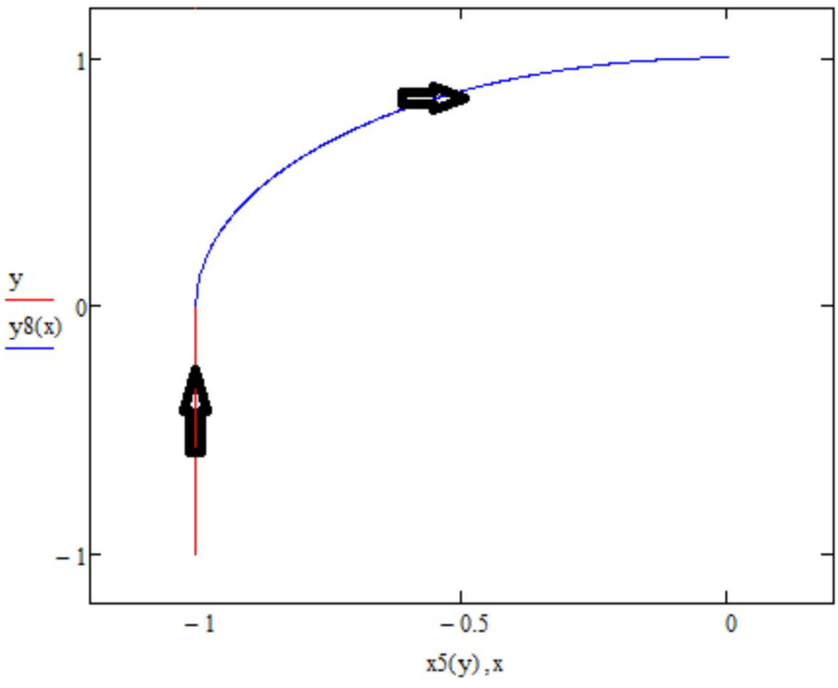
Solución.

Sea la región S descrita por $x5(y) := -1 \qquad -1 \le y \le 0$

$x^2 + y^2 = 1 \qquad -1 \le x \le 0 \qquad y \ge 0$

Graficamos la región.

$y8(x) := \sqrt{1 - x^2}$



No se puede usar Green por que no es cerrada, ni tampoco seria recomendado hacerlo. Entonces parametrizamos las dos trayectorias.

C1 $\left|\begin{array}{l} x = -1 \\ -1 \le y \le 0 \end{array}\right.$ $\sigma(t) := \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ $-1 \le t \le 0$ $\frac{d}{dt}\sigma(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ahora de la integral sabemos que: $F(x,y) := \begin{pmatrix} -y \\ \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$

Evaluamos F en la parametrizacion $F(t) := \begin{pmatrix} -t \\ \dfrac{t}{1 + t^2} \end{pmatrix}$ y realizamos el producto interno con la derivada de la parametrizacion.

$F(t)\cdot\frac{d}{dt}\sigma(t) \rightarrow \frac{t}{t^2 + 1}$ por lo cual ahora realizamos la integral.

$$\int_{-1}^{0} \frac{t}{t^2 + 1}\, dt \rightarrow -\frac{\ln(2)}{2}$$

C2 $\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ -1 \le x \le 0 \end{array}\right.$ $\sigma(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ $\pi \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ $\frac{d}{d\alpha}\sigma(\alpha) \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Evaluamos F en la parametrizacion. $F(\alpha) := \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

Producto interno. $F(\alpha)\cdot\frac{d}{d\alpha}\sigma(\alpha) = \sin(\alpha)^2 + \sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Ahora la integral. $$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha)^2 + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\, d\alpha \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Se verifica los sentidos de la parametrizacion y el dado por el problema son iguales.

La respuesta será la suma de los resultados.

$$RESP := \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$$

7.- Dados $F(x,y): R^2 \to R^2$ el campo vectorial definido por

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x+y} \end{pmatrix}$$

Y $\sigma: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R^2$ la trayectoria definida por

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos^7(t) \\ \sin^7(t) \end{pmatrix}$$

Calcule la integral de línea $\int_\sigma Fds$.

Solución.

Probemos si la función, F es conservativa, por lo que deberemos buscar una función que cumpla la condición

$$\nabla f = F \quad => \quad f(x,y) = e^{x+y} \quad : \quad \nabla f = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x+y} \end{pmatrix} = F$$

Por lo que por campo conservativo se cumple que

$$\int_\sigma Fds = \int_\sigma \nabla f ds = f(\sigma(0)) - f\left(\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Donde: $\sigma(0) = (1,0) \quad \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$

$$\int_\sigma Fds = f(1,0) - f(1,0) \quad => \quad \int_\sigma Fds = e - e \quad => \quad \int_\sigma Fds = 0$$

8.- Conociendo que

$$F(x,y,z) = (e^x \cos(y) + yz\,, xz - e^x \sin(y)\,, xy + z)$$

Calcule

$$\int_C Fds$$

Donde c es un trayectoria cualquiera que va desde el punto (1,0,0) al (0,3,3)

Solución.

Demuestre que la función es $f(x,y,z) = e^x \cos(y) + xyz + \frac{z^2}{2}$

$$\int_C Fds = \cos(3) + \frac{9}{2} - e$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 2-03-2012

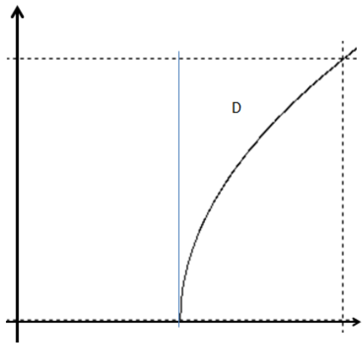
Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Cambie el orden de integración para resolver la integral

$$\int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 \cos\left(\frac{\pi}{6}(y^3+1)\right) dydx$$

SOLUCION.

Observamos los límites de integración y así obtendremos la región en la cual se integra la función.



Ahora cambiando el orden de integración tendremos

$$\int_0^1 \int_1^{y^2+1} \cos\left(\frac{\pi}{6}(y^3+1)\right) dxdy = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{6}(y^3+1)\right)(y^2)\, dy$$

Sea $u = \frac{\pi}{6}(y^3+1) \ => \ du = \frac{\pi}{2}y^2 dy \ => \ y^2 dy = \frac{2}{\pi} du$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\pi}\cos(u)\, du = \frac{2}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\pi}$$

2.- Resuelva la integral.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} xy\, dxdy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-y^2}} xy\, dxdy$$

SOLUCION.

Integramos como se nos indica con los límites establecidos.

$$\int_0^1 y\, x^2{}_0^{\sqrt{y}} dy + \int_1^{\sqrt{2}} y\, x^2{}_0^{\sqrt{2-y^2}} dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} dy + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{y}{2}(2-y^2) dy$$

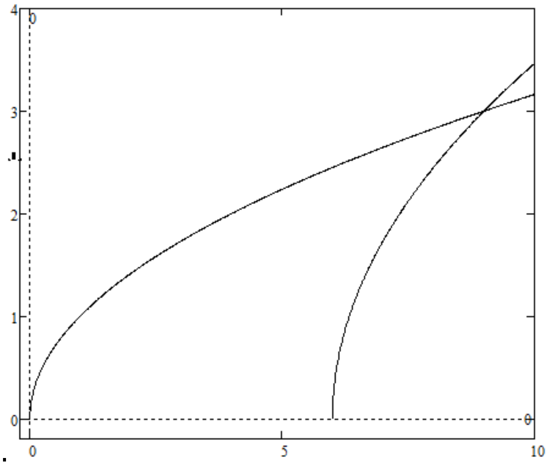
$$\frac{y^3}{6}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{y^4}{4}\right)_1^{\sqrt{2}} = \frac{7}{24}$$

3.- Sea D la región descrita por, exprese la integral pedida.

$$D = \left\{(x, y):\ y^2 \leq x \leq \frac{18 + y^2}{3}\ :\ 0 \leq y \leq 3\right\} \quad I = \int\int ycos(x)\, dxdy$$

SOLUCION.

Veamos la región D



La manera más fácil de resolver el ejercicio seria integrando primero con x y luego y, entiende por qué?

Se tiene entonces,

$$I = \int_0^3 \int_A^B y\cos(x)\, dxdy$$

Donde, $A \in \left(y = \sqrt{x}\right)$ y $B \in \left(y = \sqrt{3x - 18}\right)$

$$I = \int_0^3 \int_{y^2}^{\frac{y^2+18}{3}} y\cos(x)\, dxdy = \int_0^3 y\,(\sin(x))_{y^2}^{\frac{y^2+18}{3}}\, dy = \int_0^3 y\left(\sin\left(\frac{y^2+18}{3}\right) - sin(y^2)\right) dy$$

$$I = \int_0^3 y\sin\left(\left(\frac{y^2}{3} + \frac{18}{3}\right)\right) - y\sin(y^2)\, dy \ = \int_6^9 \frac{3}{2}\sin(u)\, du - \int_0^9 \sin(u)\frac{du}{2}$$

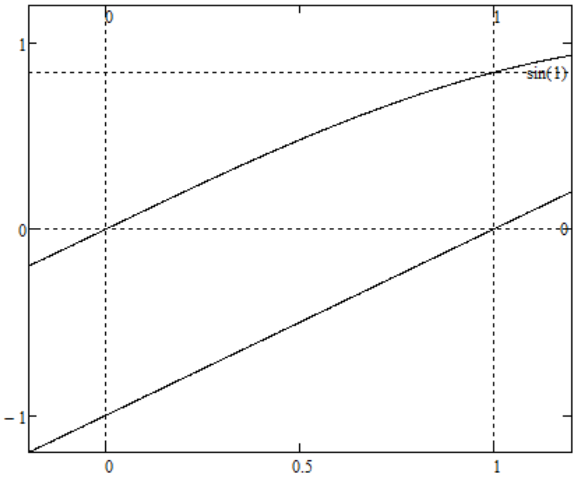
$$I = \frac{1}{2}(3\cos(6) - 2\cos(9) - 1)$$

4.- Cambie el orden de integración de la siguiente integral.

$$\int_0^1 \int_{x-1}^{\sin(x)} x\cos(x)\, dydx$$

SOLUCION.

Para cambiar el orden debemos buscar la región y esta está especificada en los límites, se tiene que



Ahora cambiamos los ejes de integración, para la primera variable a integrar (x) se tiene que hay cambio de definición de función en un intervalo de (y) entonces,

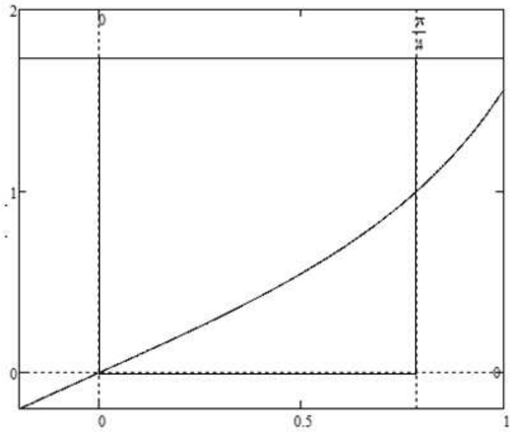
$$I = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{y+1} x\cos(x)\, dxdy + \int_{0}^{\sin(1)}\int_{\arcsin(y)}^{1} x\cos(x)\, dxdy$$

***.-** Sea D la región $D = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] x\left[0, \sqrt{3}\right]$, sea la función, calcula la integral.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+y^2} & si \;\; y \geq \tan(x) \\ 10 & si \;\; y < \tan(x) \end{cases}$$

SOLUCION.

Vemos que la región D es un cuadrado pero la función cambia de definición dentro de la región por ello graficamos la región y se tiene que:



Entonces, podemos realizar dos regiones, la primera región se cumple la condición $y < \tan(x)$, y para la segunda región la otra condición, integramos primero con el eje y y luego con x, tenemos

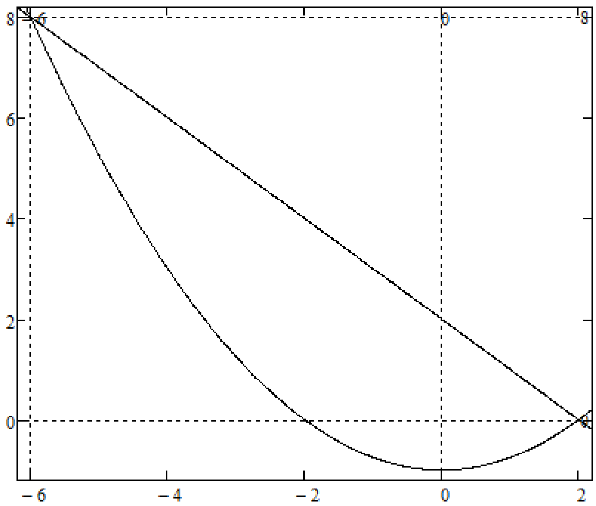
$$I1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\tan(x)} 10\, dydx \;\; ; \;\; I2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\tan(x)}^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2+1} dy\, dx$$

5.- Cambie el orden de integración de la integral

$$\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2-4}{4}}^{2-x} f(x,y)\,dydx$$

SOLUCION.

Vemos la región sobre la que se integra la función.



Para el cambio de eje se tiene cambio de límites, por lo cual.

$$I=\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{4y+4}}^{\sqrt{4y+4}} f(x,y)\,dxdy+\int_{0}^{8}\int_{-\sqrt{4y+5}}^{2-y} f(x,y)dxdy$$

6.- Sean

$$D=\{(x,y)\in R^2 \mid x^3\le y<x^2\,,-1\le x\le 1\}$$

$$I=\iint\limits_D \left|x+\frac{1}{2}\right| dxdy$$

a) Calcular I
b) Invertir el orden de integración.

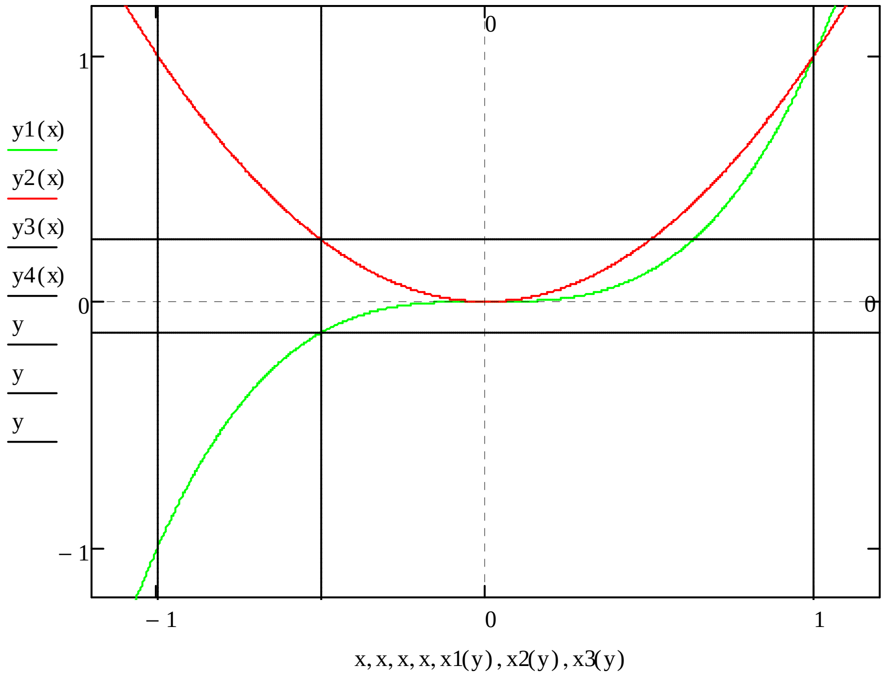
Solución.

Sea D la región descrita por: $y1(x) := x^3$ $y2(x) := x^2$ $-1 \le x \le 1$

Para el valor absoluto se tiene que: Para $x \ge \frac{-1}{2}$ se tiene $\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$x < \frac{-1}{2}$ se tiene $-\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Dibujamos la región y nos queda: Con la intersección de las curvas.



a.- La integral dada la región primero con y "y" luego con "x", queda

$$\int_{-1}^{\frac{-1}{2}}\int_{x^3}^{x^2} -\left(x+\frac{1}{2}\right) dy\, dx + \int_{\frac{-1}{2}}^{1}\int_{x^3}^{x^2} \left(x+\frac{1}{2}\right) dy\, dx \rightarrow \frac{253}{960}$$

b.- Intercambiando el orden de integración nos queda..

$$\int_{-1}^{\frac{-1}{8}}\int_{-1}^{\sqrt[3]{y}} -\left(x+\frac{1}{2}\right) dx\, dy + \int_{\frac{-1}{8}}^{\frac{1}{4}}\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} -\left(x+\frac{1}{2}\right) dx\, dy + \int_{\frac{1}{4}}^{1}\int_{-1}^{-\sqrt{y}} -\left(x+\frac{1}{2}\right) dx\, dy \rightarrow \frac{317}{1920}$$

$$+ \int_{\frac{-1}{8}}^{0}\int_{\frac{-1}{2}}^{\sqrt[3]{y}} \left(x+\frac{1}{2}\right) dx\, dy + \int_{0}^{\frac{1}{4}}\int_{\frac{-1}{2}}^{-\sqrt{y}} \left(x+\frac{1}{2}\right) dx\, dy + \int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} \left(x+\frac{1}{2}\right) dx\, dy \rightarrow \frac{63}{640}$$

$$\frac{63}{640} + \frac{317}{1920} \rightarrow \frac{253}{960}$$

7.- Calcular la siguiente integral doble.

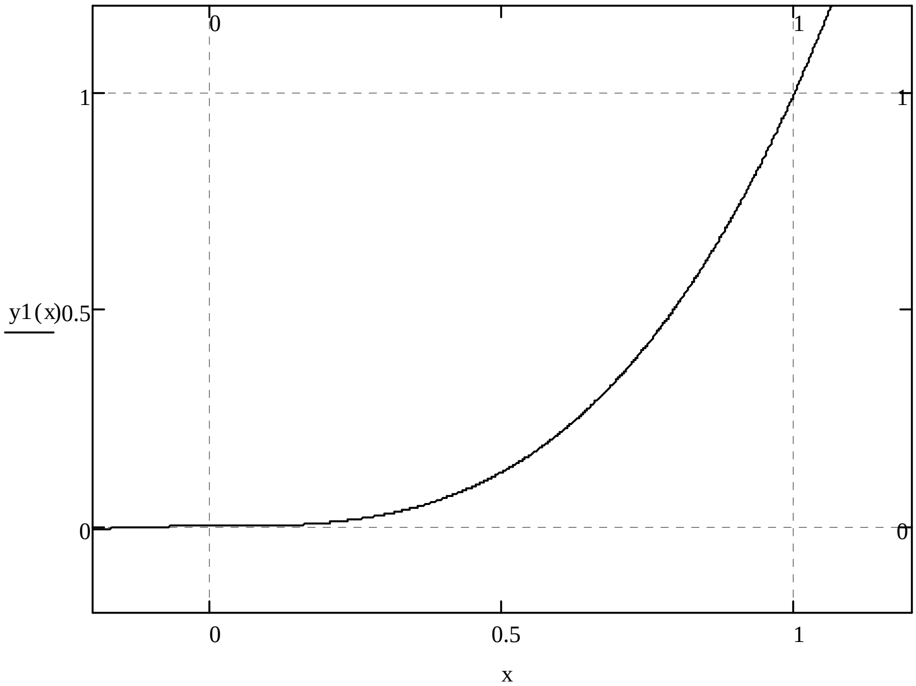
$$\iint_S 4|y - x^3|\, dxdy$$

Donde S es el rectángulo $[0,1]x[0,1]$

Solución.

Dibujamos la región S (Un cuadrado [0,1]x[0,1]) da la casualidad que la función dentro del valor absoluto cambia de definición dentro de la región por ello, se tiene

$y1(x) := x^3$



Se tiene que la región por debajo de la curva se define: $-\left(y - x^3\right)$

por encima de la curva se define $\left(y - x^3\right)$

Resolvemos la integral.

$$4\left[\int_0^1 \int_0^{x^3} -\left(y - x^3\right) dy\, dx + \int_0^1 \int_{x^3}^{1} \left(y - x^3\right) dy\, dx\right] \rightarrow \frac{11}{7}$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

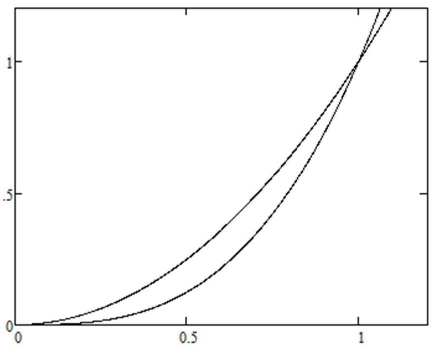
PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 9-03-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

***.-** Calcule la integral sobre la trayectoria descrita por la figura, sentido anti horario.

$$\int_{C\nearrow} (x^2 - y^2)dx + (2y - x)dy$$



$y_1(x) = x^2$; $y_2(x) = x^3$

SOLUCION.

La trayectoria es cerrada, luego aplicamos el teorema de Green

$$\int_{C\nearrow} (x^2 - y^2)dx + (2y - x)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2y - x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2)\right) dxdy$$

$$I = \iint\limits_D -1 + 2ydxdy$$

Integramos sobre el área

$$I = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (-1 + 2y)dydx = \int_0^1 (-y + y^2)_{x^3}^{x^2} dx = \frac{9}{20} - \frac{10}{21}$$

Verificamos el sentido de Green y el dado (anti horario) coinciden lo cual la integral mantiene su signo

$$I = -\frac{11}{420} \quad \boldsymbol{RESP}$$

1.- Sea la trayectoria descrita por

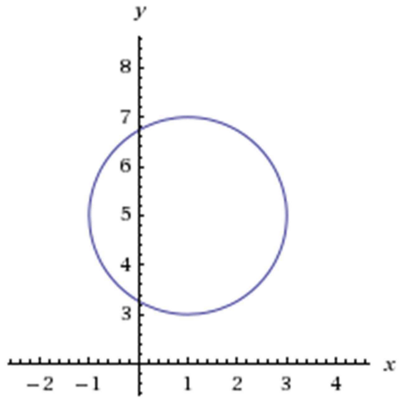
$$\gamma = \{(x, y):\ (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4\}$$

Sentido horario, calcule la integral

$$\int_{C\nearrow} (x^5 + 3y)dx + \left(2x - e^{y^3}\right)dy$$

SOLUCION.

Observamos que la región o área es un círculo centrado en (1,5) de radio 2



Usamos el teorema de Green

$$\int_{C\nearrow} (x^5+3y)dx + \left(2x - e^{y^3}\right)dy = \iint_D 2-3dA$$

$$I = \iint_D -dA$$

Observamos que la integral es tan solo el área de la región por lo tanto como el radio es 2 el área del circulo será

$$A = 4\pi$$

Luego tenemos

$$I = -4\pi$$

Verificamos la orientación de Green y la dada por el problema son inversas luego

$$I = 4\pi \quad \boldsymbol{RESP}$$

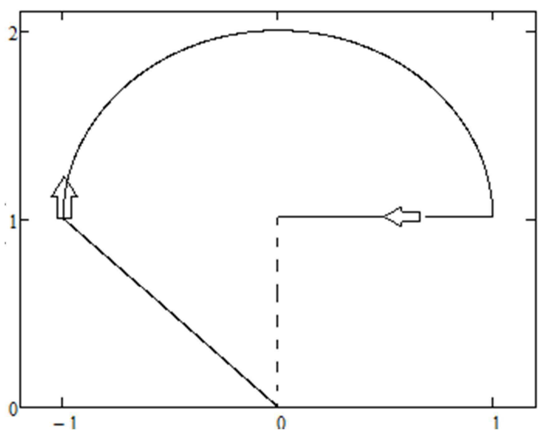
2.- Sea la función descrita por

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + \ln(2+x) \\ ye^{x^2} + \sin(y) \end{pmatrix}$$

Calcular la integral

$$\int_{C\nearrow} \langle F(x,y), \overrightarrow{ds} \rangle$$

Sobre la región descrita por la figura.



SOLUCION.

Para poder usar Green debemos cerrar la región por lo cual agregamos una recta vertical $x = 0$, con $y \in (0,1)$. Se tiene que $D = C \cup l$. Ahora si podemos aplicar Green sobre D.

$$\int_{D\nearrow green} Pdx + Qdy = \int\int_{D} \left(2xye^{x^2} - 2y\right) dA$$

Integramos sobre D

$$\int_{D\nearrow green} Pdx + Qdy = \int_0^1 \int_{-y}^{0} \left(2xye^{x^2} - 2y\right) dxdy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} (2xye^{x^2} - 2y)\, dxdy$$

$$\int_{D\nearrow green} Pdx + Qdy = -\left(\frac{e}{2} + \pi + 1\right)$$

Observando la orientación de Green y la dada por el problema notamos que son opuestas esto implica

$$\int_{D\nearrow} Pdx + Qdy = \frac{e}{2} + \pi + 1$$

Sabemos que $D = C \cup l$, entonces

$$\int_{D\nearrow} Pdx + Qdy = \int_{C\nearrow} Pdx + Qdy + \int_{l\nearrow} Pdx + Qdy$$

Buscamos ahora el valor de $\int_{l\nearrow} Pdx + Qdy$

Tenemos que l: $x = 0;\;\; 0 \le y \le 1$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \;\; => \;\; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \;\; 0 \le t \le 1 \;\; ; \;\; \sigma'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\; F(\sigma_1) = \begin{pmatrix} t^2 + \ln(2) \\ t + \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_{l\nearrow parametrizada} Pdx + Qdy = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 + \ln(2) \\ t + \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \frac{3}{2} - \cos(1)$$

Esta orientación es opuesta a la del ejercicio por lo que

$$\int_{l\nearrow} Pdx + Qdy = \cos(1) - \frac{3}{2}$$

Despejamos el valor de la integral problema

$$\int_{D\nearrow} Pdx + Qdy - \int_{l\nearrow} Pdx + Qdy = \int_{C\nearrow} Pdx + Qdy$$

Se concluye:

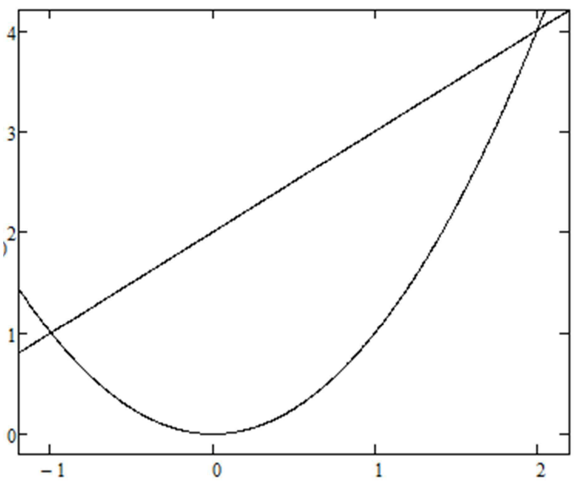
$$\int_{C\nearrow} Pdx + Qdy = \frac{e}{2} + \pi + 1 + \frac{3}{2} - \cos(1)$$

3.- Sean D la region acotada delimitada por las curvas: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ y C la frontera D recorrida en sentido horario. Calcular.

$$\int_{C\uparrow} (xy + e^x)dx + (x^2 + \sin(y))dy$$

Solución.

Determinamos la región D. Y tenemos que.



La region es cerrada, y el sentido debe ser antihorario para que el area queda a la izquierda al ser recorrida la periferia. Bien ahora es posible usar el teorema de green, se tiene

$$\int_{C\uparrow green} (xy + e^x)dx + (x^2 + \sin(y))dy =$$

$$\iint_D (2x - x)dA$$

Y la integral se resuelve por

$$I = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} x\,dydx \;\; => \;\; \boldsymbol{I = \frac{9}{4}}$$

Bien ademas sabemos que los sentidos son opuestos luego.

$$\int_{C\uparrow} (xy + e^x)dx + (x^2 + \sin(y))dy = -\int_{C\uparrow green} (xy + e^x)dx + (x^2 + \sin(y))dy$$

$$\boldsymbol{I = -\frac{9}{4}\;\; RESP}$$

4.- Usando el cambio de variable adecuado calcular.

$$\iint_D \sin\left(\frac{y - x}{x + y}\right) dA$$

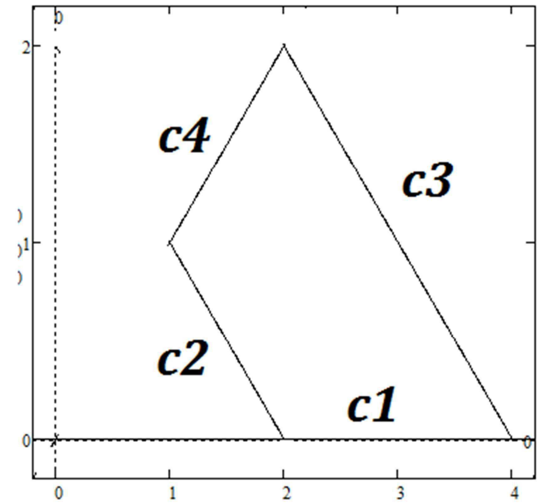
Siendo D el trapecio de vértices (1,1) (2,2) (2,0) (4,0).

Solución.

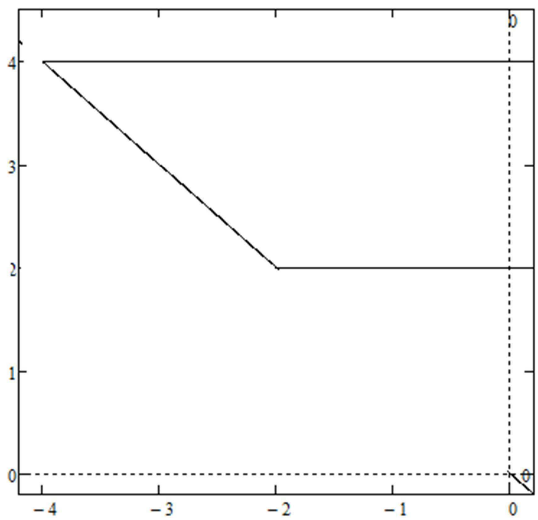
Sea el cambia de variable. $\begin{cases} u = y - x \\ v = x + y \end{cases}$ => De manera explicita : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(v-u) \\ y = \frac{1}{2}(u+v) \end{cases}$

Donde el jacobiano es $jacobiano = \frac{1}{2}$.

Región D. Región D^*



=>



Para conseguir D* debemos parametrizar la frontera de D.
Luego se tiene

$$C1 : \begin{cases} y = 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad => \quad CV \begin{cases} u + v = 0 \\ 2 \leq \dfrac{1}{2}(v-u) \leq 4 \end{cases} => \begin{cases} v = -u \\ 2 \leq v \leq 4 \end{cases}$$

$$C2: \begin{cases} y = 2 - x \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad => \quad CV \begin{cases} v = 2 \\ 0 \geq u \geq -2 \end{cases} \qquad C3: \begin{cases} y = 4 - x \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad => \quad CV \begin{cases} v = 4 \\ 0 \geq u \geq -4 \end{cases}$$

$$C4: \begin{cases} y = x \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad => \quad CV \begin{cases} u = 0 \\ 2 \leq v \leq 4 \end{cases}$$

Una vez obtenido D* procedemos a integrar sobre la nueva region.

$$\iint_D \sin\left(\frac{y-x}{x+y}\right) dA = \iint_{D*} \sin\left(\frac{u}{v}\right)\frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2}\int_2^4 \int_{-v}^0 \sin\left(\frac{u}{v}\right) dudv$$

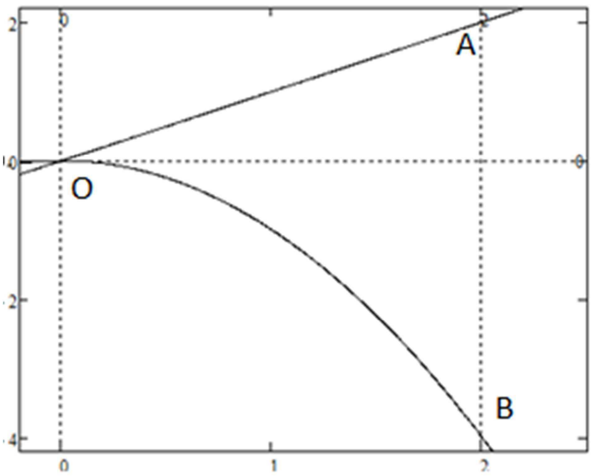
$$I = 3(\cos(1) - 1)$$

***.-** Calcule la integral sobre la región D, con el cambio de variable dado.

$$D = \{(x,y): -x^2 \leq y \leq x \;;\; 0 \leq x \leq 2\} \qquad I = \int\int_D \frac{dxdy}{(x-y+1)^2}$$

$$T(u,v) = \begin{pmatrix} x = u + v \\ y = v - u^2 \end{pmatrix}$$

SOLUCION.



Debemos buscar D^* para ello seleccionamos las fronteras AO, AB, AB, y aplicamos sus condiciones para el cambio de variable que nos indica y ver que restricciones cumple las nuevas variables u, v. Comenzamos.

RECTA OA

Se cumple $\begin{cases} y = x \\ 0 \leq x \leq 2 \quad ó \quad 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

Aplico el cambio de variable y se tiene

$$\begin{cases} u + v = v - u^2 \quad => \quad u = -u^2 \quad => \quad u + u^2 = 0 \quad => \quad u(1+u) = 0 \\ Se\ tiene \quad \boldsymbol{u = 0} \quad ó \quad \boldsymbol{u = -1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)\ u = 0 \ ; \quad 0 \leq x \leq 2 \quad => \quad 0 \leq u + v \leq 2 \quad => \quad \boldsymbol{0 \leq v \leq 2} \\ (2)\ u = -1 \ ; \quad 0 \leq x \leq 2 \quad => \quad 0 \leq u + v \leq 2 \quad => \quad \boldsymbol{1 \leq v \leq 3} \end{cases}$$

RECTA AB

Se cumple que $\begin{cases} x = 2 \\ -4 \leq y \leq 2 \end{cases}$, aplicamos el cambio de variable.

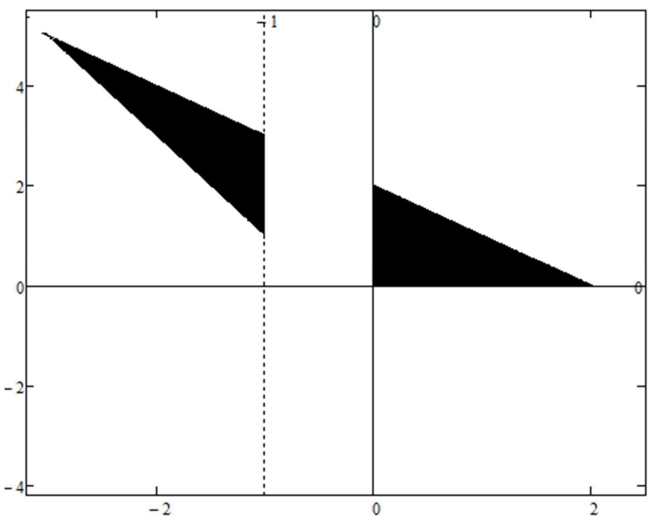
$$u + v = 2 \ => \quad \boldsymbol{u = 2 - v}$$

$$Para \quad u = 2 - v \ ; \quad -4 \leq v - u^2 \leq 2 \quad => \quad -4 \leq 2 - u - u^2 \leq 2 \ => \quad 0 \leq u + u^2 \leq 6$$

$$(1) \ \ 0 \leq u(u+1) \quad => \quad \begin{cases} u \geq 0 \\ u \geq -1 \end{cases} \ ó \ \begin{cases} u \leq 0 \\ u \leq -1 \end{cases} \quad => \ \ u \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

$$(2) \quad u + u^2 \leq 6 \quad => \quad u^2 + u - 6 \leq 0 \quad => \quad (u+3)(u-2) \leq 0 \quad => \quad u \in (-3, 2)$$

De la unión entre (1) y (2) se tiene el conjunto solución para u. $\boldsymbol{u \in (-3, -1) \cup (0, 2)}$



ARCO OB.

Se cumple que $\begin{cases} y = -x^2 \\ 0 \leq x \leq 2 \quad ó \quad -4 \leq y \leq 0 \end{cases}$, aplicamos el cambio de variable.

$$v - u^2 = -(u+v)^2 \ => \quad v - u^2 = -u^2 - 2uv - v^2 \ => \quad v(1 + v + 2u) = 0$$

$$(1) \quad \boldsymbol{v = 0} \quad => \quad \boldsymbol{0 \leq u \leq 2}$$

$$(2)\ \boldsymbol{v = -2u - 1} \quad => \quad 0 \leq u + v \leq 2 \ => \quad 0 \leq -u - 1 \leq 2 \quad => \quad \boldsymbol{-3 \leq u \leq -1}$$

Para cada uno de los casos se grafica las condiciones que se obtuvieron y por lo cual la región D^* es de la forma.

Esto implica que se tiene que hacer dos integrales, una para cada región de la nueva D^*. Sea D_1 el triángulo rectángulo y sea D_2 el triángulo obtusángulo

Buscamos el jacobiano y la integral con el cambio aplicado.

$$I = \int\int \frac{jacobiano\ dudv}{(u + v - (v - u^2) + 1)^2}$$

$$I = \int\int jacobiano \frac{dudv}{(u^2 + u + 1)^2} \qquad jacobiano = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix} = (1 + 2u)$$

$$I = \int\int \frac{2u + 1}{(u^2 + u + 1)^2} dudv$$

Para la primera región D_1, tenemos que

$$I = \int_0^2 \int_0^{2-u} \frac{2u + 1}{(u^2 + u + 1)^2} dvdu$$

Integramos con v

$$I = \int \frac{3u - 2u^2 + 2}{(u^2 + u + 1)^2} du = \frac{u}{u^2 + u + 1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2 \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(u + \frac{1}{2}\right)\right) - \pi\right) - \frac{2}{u^2 + u + 1}$$

Evaluamos en los límites y tenemos

$$I_{D1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi + 2$$

Para la región D_2,

$$I = \int_{-3}^{-1} \int_{-1-2u}^{2-u} \frac{2u + 1}{(u^2 + u + 1)^2} dvdu$$

Integramos

$$I = \int \frac{(u + 3)(2u + 1)}{(u^2 + u + 1)^2} du = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2 \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(u + \frac{1}{2}\right)\right) - \pi\right) - \frac{u}{u^2 + u + 1} - \frac{3}{u^2 + u + 1}$$

Evaluamos en los limites

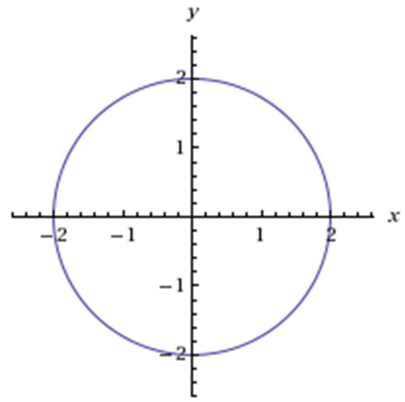
$$I_{D2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{9}\pi - 2$$

***.-** Sea la integral, sobre la región D, resuelva

$$D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 4\} \qquad I = \int\int_D (x^2+y^2)^2\, dxdy$$

SOLUCION.

Ya que la región D es un circulo podemos usar el cambio de coordenadas polares, donde el cambio viene dado por



$$CV = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \text{ y ademas } jacobiano = r$$

Dado a que el radio del circulo es 2 unidades, y está centrado en (0,0), entonces

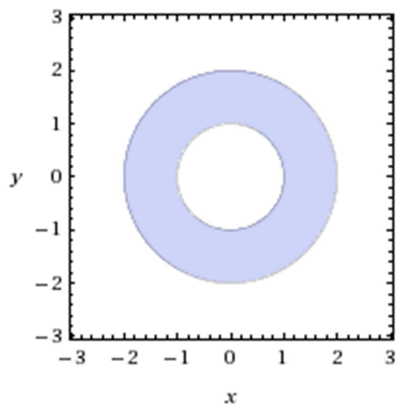
$$r \in (0,2)\ ; \quad \theta \in (0,2\pi)$$

Aplicando el cambio de variable

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^2 ((r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2)^2 r\, drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2)^2 r\, drd\theta = \frac{64}{3}\pi$$

***-** Sea la integral, sobre la región D, resuelva

$$D = \{(x,y):\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \qquad I = \int\int_D e^{x^2+y^2}\, dxdy$$



SOLUCION.

Se tiene que la región es un círculo de radio 2 hueco con un círculo de radio 1. Aplicamos cambio de variable coordenadas polares, y como se tiene que está centrado en punto de origen tenemos que:

$$CV = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad jacobiano = r$$

$$r \in (1,2) \quad y \quad \theta \in (0,2\pi)$$

Por lo que la integral queda

$$I = \int_0^{2\pi}\int_1^2 e^{r^2} r\, drd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(e^4 - e)d\theta = \pi(e^4 - e)$$

***.-** Calcule el área de la región

$$D = \left\{(x,y):\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

SOLUCION.

Para buscar el área, vamos a realizar un cambio de variable, ya que la integral que define el área es

$$A = \int\int dxdy$$

Entonces observamos que

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad => \quad sea\ \frac{x}{a} = r\cos(\theta) \quad y \quad \frac{y}{b} = r\sin(\theta)$$

$$CV = \begin{cases} x = a\,r\cos(\theta) \\ y = b\,r\sin(\theta) \end{cases} \quad jacobiano = \begin{vmatrix} a\cos(\theta) & -b\,r\sin(\theta) \\ b\sin(\theta) & b\,r\cos(\theta) \end{vmatrix} = a\,b\,r$$

Dado a que está centrado en el origen se tiene

$$r \in (0,1) \quad \theta \in (0,2\pi)$$

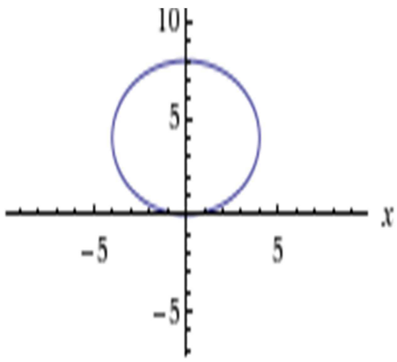
Se da cuenta Uds. que el cambio que elegimos transforma la elipse en una circunferencia de radio 1. ¿Piense por qué? Luego

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 a\,b\,r\ \ dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} a\,b\frac{1}{2}d\theta = ab\pi$$

5.- Determine la integral sobre la región D.

$$D = \{(x,y):\ \ x^2 + (y-4)^2 \le 16\} \qquad I = \int\int_D (x^2+y^2)^2 dxdy$$

SOLUCION.



Observamos que es una circunferencia centrada el (0,1) luego para un cambio de coordenadas polares se tiene

$$CV = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad jacobiano = r$$

Para los valores de θ, note que partimos del anulo 0° hasta el angulo π donde se termina la región, para r se tiene que

De la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8y = 0$, aplicando el cambio polar

$$r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) - 8r\sin(\theta) = 1 \ => \ r^2 - 8r\sin(\theta) = 0 \ \ => \ r(r - 8\sin(\theta)) = 0$$

Se tiene que, $r = 0$ ó $r = 8\sin(\theta)$, los cuales son los límites de r.

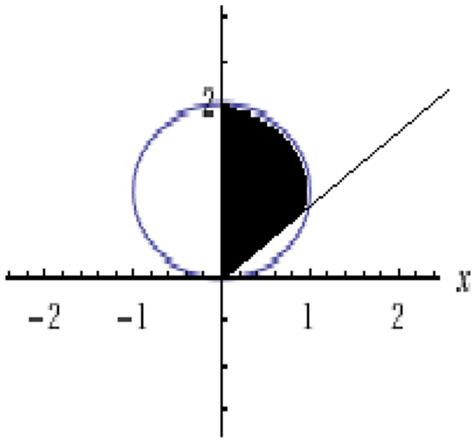
Dado a que la variable r depende de θ entonces se debe integrar primero r y luego θ.

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{8\sin(\theta)} r^4\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\frac{8^6}{6}\sin^6(\theta)\,d\theta = \frac{10}{3}8^4\pi$$

6.- Calcule la integral sobre la región D.

$$D = \{(x, y): 0 \leq \sqrt{3}x \leq y\, ; \;\; x^2 + (y-1)^2 \leq 1\} \qquad I = \int\int_D xy\, dxdy$$

SOLUCION.



Usando el cambio de variable de coordenadas polares se tiene

$$CV = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad jacobiano = r$$

La integral queda.

$$\int\int_{D^*} r^3 \sin(\theta)\cos(\theta)\, d\theta$$

Para los valores de las variables $r, y \;\; \theta$, observamos la regio D. y tenemos que

$\theta \in \left(\theta_0, \frac{\pi}{2}\right)$, donde θ_0 viene dado por la pendiente de la recta

$$\tan(\theta) = \sqrt{3} \;\; => \;\; \theta_0 = \frac{\pi}{3}$$

Y sea la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y = 0$, aplicamos en cambio de variable y tenemos

$$r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) - 2r\sin(\theta) = 0 \quad => \quad r(r - 2\sin(\theta)) = 0 \;\; => \begin{cases} r = 0 \\ r = 2\sin(\theta) \end{cases}$$

Luego concluimos que $r \in (0, 2\sin(\theta))$

Resolvemos la integral.

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin(\theta)} r^2 \sin(\theta)\cos(\theta)\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\, 4\sin^4(\theta) d\,\theta = \frac{4}{6}\sin^6(\theta)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{27}{64}\right)$$

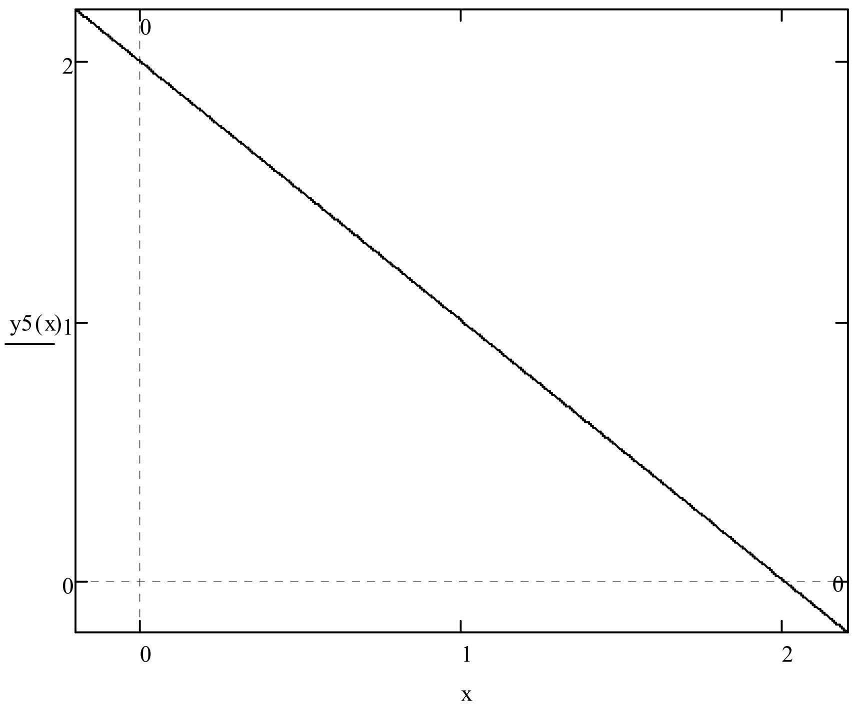
7.- Sea $D = \{(x, y) \in R^2 : x + y \leq 2\,, \;\; x \geq 0 \;\; , y \geq 0\}$ Utilizar el cambio de variable dado por $u = x + y \;\; v = x - y$ para calcular

$$\iint_D \cos((x+y)^2)\, dxdy$$

Solución

Sea D la región. $x + y \le 2$ $\quad x \ge 0$ $\quad y \ge 0$

Graficamos la región. $y5(x) := 2 - x$



Aplicamos el cambio de variable recomendado.

Se tiene que $\begin{vmatrix} u = x + y \\ v = x - y \end{vmatrix}$ se busca $\begin{vmatrix} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(u - v) \end{vmatrix}$

Determinamos el jacobiano. $\text{Jacobiano} := \left| \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \right| \right| \rightarrow \frac{1}{2}$

Ahora buscamos la nueva región a integrar. Tenemos que parametrizar.

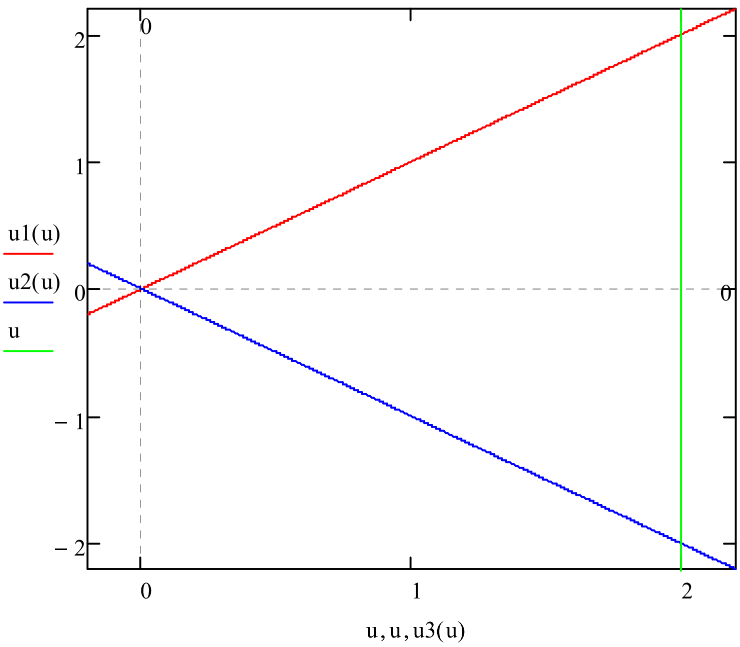
C1 $\begin{vmatrix} y + x = 2 \\ 0 \le x \le 2 \end{vmatrix}$ se tiene $\begin{vmatrix} u = 2 \\ -2 \le v \le 2 \end{vmatrix}$

C3 $\begin{vmatrix} y = 0 \\ 0 \le x \le 2 \end{vmatrix}$ se tiene $\begin{vmatrix} v = u \\ 0 \le u \le 2 \end{vmatrix}$

C2 $\begin{vmatrix} x = 0 \\ 0 \le y \le 2 \end{vmatrix}$ se tiene $\begin{vmatrix} v = -u \\ 0 \le u \le 2 \end{vmatrix}$

Graficamos D*

$u1(u) := u \qquad u2(u) := -u \qquad u3(u) := 2$



Ahora integramos aplicando el cambio.

$$\int \int \cos\left(u^2\right) \frac{1}{2}\, du\, dv$$

Sobre la region D* tenemos-

$$\int_0^2 \int_{-u}^{u} \cos\left(u^2\right) \frac{1}{2}\, dv\, du \rightarrow \frac{\sin(4)}{2}$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 16-03-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Sea la región descrita por, determinar la integral.

$$\omega = \left\{(x, y, z):\ x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4\,, \qquad z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

$$I = \iiint_{\omega} z dV$$

Solución.

La región a determinar es la intercepción del ELIPSOIDE con el cono que abre hacia arriba de sección transversal circular. Tal solido determinaremos la integral por medio de coordenadas cilíndricas. Esto es primero altura. Dese cuenta que el sólido va desde el CONO hasta la parte positiva del ELIPSOIDE luego.

$$I = \iint_{Proy} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-\frac{x^2+y^2}{2}}} zdz\, dA => \ I = \iint_{Proy} \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)\right) dA$$

$$I = \iint_{Proy} \left(1 - \frac{3}{4}(x^2 + y^2)\right) dA$$

La proyección será la intersección de las dos regiones. Luego buscamos la intersección.

$$\gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} => \ z = \frac{2}{\sqrt{3}} \ => \ \frac{4}{3} = x^2 + y^2$$

Es un circulo luego, realizamos la doble integral por coordenadas polares, ya que el circulo es centro en (0,0) sabemos que

$$\theta \in (0{,}2\pi) \quad y \quad r \in \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Entonces

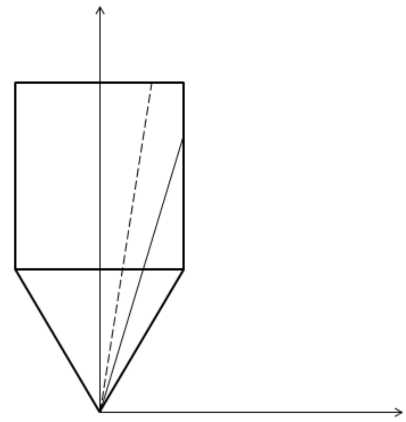
$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(1 - \frac{3}{4}r^2\right) rdrd\theta => \quad \boldsymbol{I = \frac{2\pi}{3}}$$

2.- Calcule el volumen de la región

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \colon z \geq \sqrt{x^2+y^2};\;\; x^2+y^2 \leq 4 \;;\; z \leq 4\right\}$$

SOLUCION.

Si graficamos la región omega y la proyectamos en el plano yz tenemos



Buscamos la intersección entre el cono de sección circular y el cilindro.

$$\vartheta = \begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \;\; => \;\; \vartheta \colon \{z = 2\,;\;\; x^2+y^2 = 4\}$$

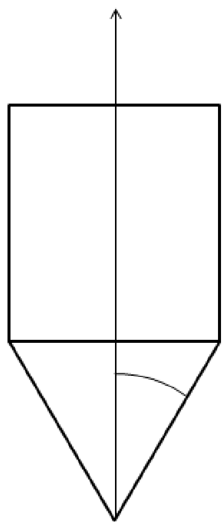
Buscamos los valores de las variables en el cambio de coordenadas esféricas, para θ, proyectamos el solido en el plano xy, luego tenemos un círculo centrado en (0,0) esto implica

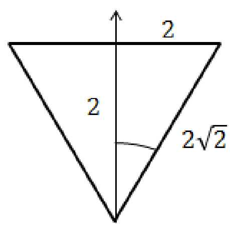
$$\theta \in (0,2\pi)$$

Para φ, tenemos $\varphi \in (0, \varphi_{max})$

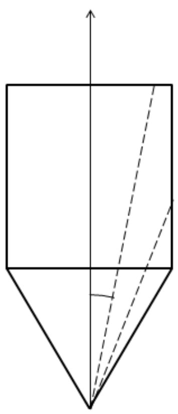
Donde φ_{max} viene por el triángulo, se tiene entonces que $\varphi_{max} = \frac{\pi}{4}$

$$\varphi\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$





Para ρ, tenemos que cambiar ya que



Se tiene un ρ para un cierto valor de φ y otro valor para otros intervalo de φ, entonces separemos el rango de φ.

Para $\varphi \in (0, \varphi_A)$, se tiene que $\rho(0, \rho_Z)$, donde $\rho_Z \in (z = 4)$

Dado el cambio de variable $z = \rho\cos(\varphi)$ =>
$\rho_Z = \frac{4}{\cos(\varphi)}$

Para $\varphi \in \left(\varphi_A, \frac{\pi}{4}\right)$, se tiene que $\rho \in (0, \rho_C)$donde $\rho_C \in (cilindro : x^2+y^2 = 4)$

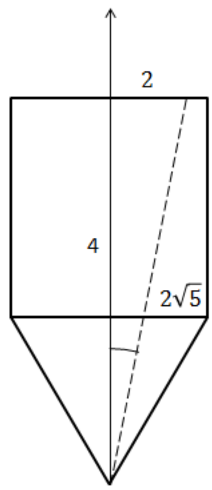
Dado el cambio de variable

$$(\rho\cos(\theta)\sin(\varphi))^2 + (\rho\sin(\theta)\sin(\varphi))^2 = 4 \;\; => \;\; \rho^2\sin^2(\varphi) = 4 \;\; => \;\; \rho_C = \frac{2}{\sin(\varphi)}$$

Ahora buscamos el valor de φ_A. Que viene dado por el triángulo, concluimos que

$$cotan(\varphi_A) = 2$$

$$\cos(\varphi_A) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



Resolvemos la integral.

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\varphi_A} \int_0^{\frac{4}{\cos(\varphi)}} \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho d\varphi + \int_{\varphi_A}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2}{\sin(\varphi)}} \rho^2\, sin(\varphi)\, d\rho d\varphi \right] d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\varphi_A} \frac{2^6}{3} \frac{\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} d\varphi + \int_{\varphi_A}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2^3}{3} \frac{\sin(\varphi)}{\sin^3(\varphi)} d\varphi \right] d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{2^6}{3} \left(\frac{1}{\cos(\varphi_A)} - 1 \right) - \frac{2^3}{3} \left(1 - cotan(\varphi_A)\right) d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{2^4}{3} d\theta \quad => \quad V = \frac{32}{3}\pi$$

3.- Exprese la integral sin calcularla sobre la región dada.

$$\Omega = \left\{ (x,y,z):\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 4\ ;\ \ z + x^2 + y^2 \ge \frac{9}{4} \right\}$$

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{z(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} dxdydz$$

SOLUCION.

Debemos buscar los valores para las variables en el cambio esférico. Es importante interceptar los dos solidos

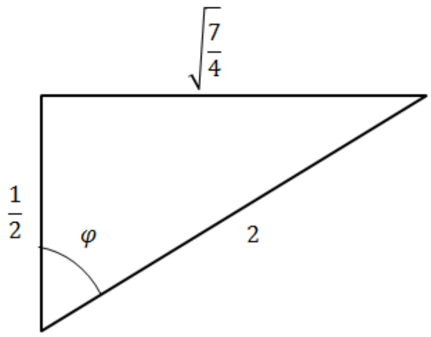
$$\varphi = \begin{cases} z + x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4} \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \end{cases} \quad => \quad \varphi = \left\{ x^2 + y^2 = \frac{7}{4}\ , z = \frac{1}{2} \right\}$$

La proyección del solido será la esfera completa de radio 2.

$$D = \{x^2 + y^2 = 4\}$$

De aquí deducimos que los valores para la variable $\theta \in (0,2\pi)$

Buscamos los valores de φ. Phi va desde cero (eje z) hasta la intercepción de los sólidos tenemos un triángulo como sigue.



Donde $\varphi_{max} \Rightarrow \tan(\varphi) = \sqrt{7}$

Por lo cual

$$\varphi \in (0, \varphi_{max})$$

Buscamos por ultimo $\rho \in (\rho_A, \rho_B)$ $donde$ $\rho_A \in Paraboloide$ $\rho_B \in Esfera$

Dado el cambio de coordenas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases} \quad jacobiano = \rho^2 \sin(\varphi)$$

Bien, el paraboloide de ecuación, aplicamos el cambio de variable

$$z + x^2 + y^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \rho\cos(\varphi) + (\rho\sin(\varphi)\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\varphi)\sin(\theta))^2 = \frac{9}{4}$$

$$\rho\cos(\varphi) + \rho^2\sin^2(\varphi) - \frac{9}{4} = 0$$

De la ecuación de segundo grado con incógnita ρ

$$\rho_A = \frac{-\cos(\varphi) + \sqrt{\cos^2(\varphi) + 9\sin^2(\varphi)}}{2\sin^2(\varphi)}$$

Solo la positiva, la negativa corresponde al opuesto.

Luego, la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, aplicamos las coordenas esféricas

$$(\rho\cos(\varphi))^2 + (\rho\sin(\varphi)\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\varphi)\sin(\theta))^2 - 4\rho\cos(\varphi) = 0$$

$$\rho^2 - 4\rho\cos(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho_B = 4\cos(\varphi) \end{cases}$$

Una vez halladas los valores procedemos a escribir la integral

$$I = \int\int\int_{\Omega} \frac{z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}dxdydz$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan(\sqrt{7})}\int_{\frac{-\cos(\varphi)+\sqrt{\cos^2(\varphi)+9\sin^2(\varphi)}}{2\sin^2(\varphi)}}^{4\cos(\varphi)}(\rho\sin^3(\varphi)\cos(\varphi))\,d\rho\,d\varphi d\theta$$

4.- Calcule el volumen de la región dada,

$$\Omega = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 \le 4x\ \ ;\ \ x^2+y^2+z^2 \le 16\ ;\ \ z \ge 0\}$$

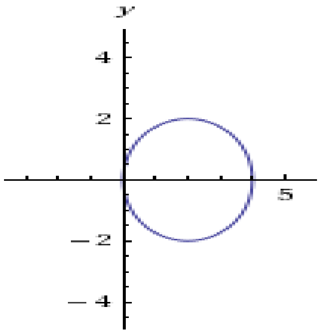
SOLUCION.

El volumen del solido viene dado por $V = \int\int\int_{\Omega}\ dxdydz$

Resolvemos esta triple integral por el cambio de variable polar, por ello la primera variable será z. z parte de cero hasta la esfera de radio 4 parte positiva

$$V = \int\int_D\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz\,dA = \int\int_D \sqrt{16-(x^2+y^2)}dA$$

La región viene dada por la proyección del solido en el plano xy, esta proyección vendrá siendo el cilindro de ecuación $(x-2)^2+y^2 = 4$ ¿Por qué?



Observamos que los valores para el ángulo θ

$$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Mientras que los valores para r, serán:

Sea la ecuación del círculo, aplicamos el cambio polar

$$x^2+y^2-4x = 0 \quad => \quad r^2-4r\cos(\theta) = 0$$

$$r(r-4\cos(\theta)) = 0 \quad => \quad \begin{cases} r = 0 \\ r = 4\cos(\theta) \end{cases} \quad luego \quad r \in (0{,}4\cos(\theta))$$

Integramos ahora.

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4cos(\theta)} \sqrt{16-r^2}r\ drd\theta \ => \quad V = \frac{4^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$$

5.- Calcule el volumen sobre la región.

$$\alpha = \{(x, y, z): z \geq x^2 + y^2 \ ; \quad z \leq 10 - x^2 - 2y^2\}$$

SOLUCION.

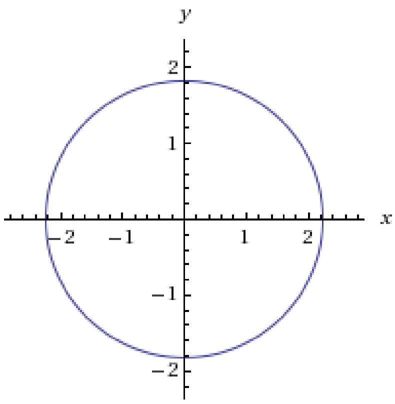
La ecuación $z \geq x^2 + y^2$ representa un paraboloide de sección transversal circular cuya desigualdad se cumple para la parte interna.

La ecuación $z \leq 10 - x^2 - 2y^2$ representa un paraboloide de sección transversal elipse cuya desigualdad se cumple para la parte interna.

Debemos buscar la intersección de los dos volúmenes

$$\delta = \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 10 - x^2 - 2y^2 \end{cases} \Rightarrow \ x^2 + y^2 = 10 - x^2 - 2y^2 \ \Rightarrow \ 2x^2 + 3y^2 = 10$$

Lo cual es una elipse.



Usando coordenadas polares, se tiene que

$$CV = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad jacobiano = r$$

Y Parametrizamos la elipse, se tiene

$$\frac{x^2}{5} + \frac{3}{10}y^2 = 1 \ \Rightarrow \ \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{10}}y\right)^2 = 1$$

Sea $\frac{x}{\sqrt{5}} = r\cos(\theta) \ \Rightarrow \ x = \sqrt{5}\cos(\theta)$; $\sqrt{\frac{3}{10}}y = r\sin(\theta) \ \Rightarrow \ y = \sqrt{\frac{10}{3}}r\sin(\theta)$

Donde el jacoabiano ya lo demostramos anteriormente, $jacobiano = \sqrt{\frac{50}{3}}r$

Bien, ahora realizamos el cambio de coordenadas polares para 3D, z será el vector que va paralelo al eje z, desde el comienzo del solido hasta el final.

$$V = \iiint_{\alpha} dxdydz = \iint_{D} \int_{x^2+y^2}^{10-x^2-2y^2} dz\, dA = \iint_{D} 10 - 2x^2 - 3y^2\, dA$$

La región D es la que resulta al proyectar el sólido en el plano xy, resulta la elipse de intercepción ¿Por qué?, entonces aplicando el cambio que se obtuvo al parametrizar

Con los valores, $\theta \in (0, 2\pi)$, $r \in (0,1)$

Realizamos la integral

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (10 - 10r^2\cos^2(\theta) - 10\,r^2\sin^2(\theta))rdrd\theta = \int_0^{2\pi} 10(1-r^2)rdrd\theta$$

$$\boldsymbol{V = \frac{50}{\sqrt{6}}\pi}$$

6.- Calcular el volumen del solido T donde

$$T = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 \geq z^2\ , \qquad x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2\ \ ,\ \ x^2+y^2 \leq 2az\}$$

Solución.

Sean la región formada por:

CONC $\quad x^2 + y^2 \geq z^2$

ESFERA $\quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$

PARABOLOIDI $\quad x^2 + y^2 \leq 2az$

Busquemos los niveles de intersección de las regiones UNO a UNO.

Cono y Esfera:

$$\left| \begin{array}{l} z^2 + z^2 = 3a^2 \\ z = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,a \end{array} \right.$$

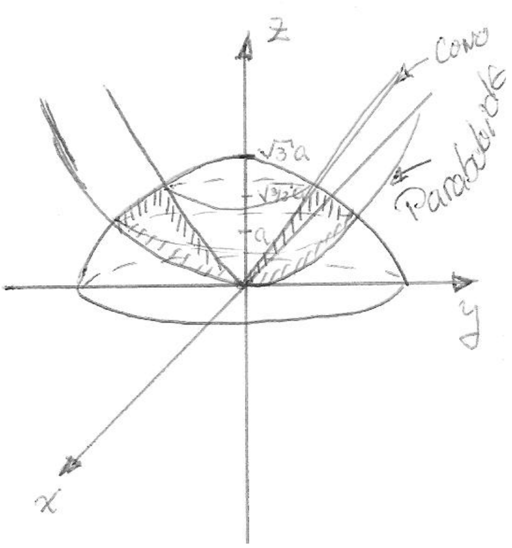
Paraboloide y Cono.

$$\left| \begin{array}{l} z^2 = 2az \\ z\cdot(z - 2a) = 0 \\ z = 2a \end{array} \right.$$

Esfera y Paraboloide

$$\left| \begin{array}{l} 2az + z^2 = 3a \\ z^2 + 2az - 3a^2 = 0 \\ z = a \end{array} \right.$$

Notamos que el nivel de (z) para la intersección del cono y paraboloide ocurre a un nivel mayor que el radio de la esfera luego dicha intersección no esta dentro del volumen. Del restos las demás si. Si graficamos las regiones con sus desigualdades, nos queda el siguiente volumen.



La intersección del cono/esfera dada un circulo de ecuación.

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}a^2$$

Y la intersección del paraboloide/esfera.

$$x^2 + y^2 = 2a^2$$

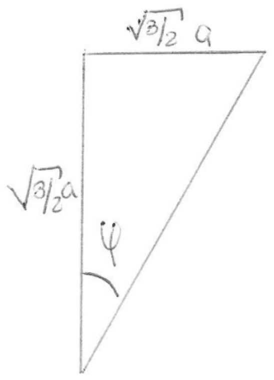
Analizamos las variables del cambio de coordenas ESFERICAS.

La proyección es un circulo centrado en el origen luego.

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

El ángulo φ va desde el ángulo formado por el cono hasta un valor máximo dado por la intersección de la esfera/paraboloide para luego desde este valor hasta π /2. Esto con el fin de establecer los valores de la variable ρ .

Rho ira (para φ de cono a intersección) de 0 a radio de esfera. Pero Rho ira (para φ de intersección a π /2) de 0 hasta paraboloide.



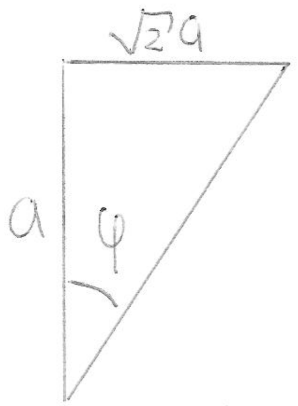
Buscamos φ cono:

Del triangulo se tiene que: $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Buscamos φ de la intersección.

Del triangulo se tiene que:

$$\varphi1 := \operatorname{atan}\left(\sqrt{2}\right)$$



No me interesa el valor del ángulo sino los valores de las relaciones trigonométricas del mismo luego.

Ahora buscamos la dependencia de ρ sobre el ángulo φ .
Sabemos que ρ llega hasta el paraboloide de ecuación.

$$x^2 + y^2 = 2az$$ aplicando cambio Esférico se tiene.

$$\rho^2 \sin(\varphi)^2 - 2a\cdot\rho\cdot\cos(\varphi) = 0$$

Del que se obtiene: $$\rho = 2a\cdot\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)^2}$$

Ya determinado los valores del cambio de variable resolvemos la integral

$$\int\int\int 1\,dx\,dy\,dz$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi1}\int_0^{\sqrt{3}\cdot a} \rho^2\cdot\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\varphi1}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cdot\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)^2}} \rho^2\cdot\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Resolvemos la integral para ρ

$$\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi1} \sin(\varphi)\cdot\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}\cdot a^3\right)d\varphi\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\varphi1}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{8a^3\cos(\varphi)^3}{\sin(\varphi)^6}\right)d\varphi\,d\theta$$

Reorganizamos un poco las integrales nos queda:

$$\sqrt{3}a^3\cdot\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi 1}\sin(\varphi)\,d\varphi\,d\theta+\frac{8}{3}a^3\cdot\int_0^{2\pi}\int_{\varphi 1}^{\frac{\pi}{2}}\cot(\varphi)^3\cdot\csc(\varphi)^2\,d\varphi\,d\theta$$

Ahora resolvemos la integral de φ

$$a^3\left[\sqrt{3}\cdot\int_0^{2\pi}\left(-\cos(\varphi 1)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)d\theta+\frac{8}{3}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{-\cot\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{4}+\frac{\cot(\varphi 1)^4}{4}\,d\theta\right]$$

Y por ultimo la integral de θ . Recordemos que: $\cos(\varphi 1):=\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\cot(\varphi 1):=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$a^3\left[\sqrt{3}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)2\pi+\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 2\pi\right]\text{ simplify }\rightarrow\frac{\pi\cdot a^3\cdot\left(3\cdot\sqrt{6}-5\right)}{3}$$

RESPUESTA.

7.- Una integral triple en coordenadas cilíndricas viene dada por

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3\sin(\theta)\cos(\theta)\,z^2dzdrd\theta$$

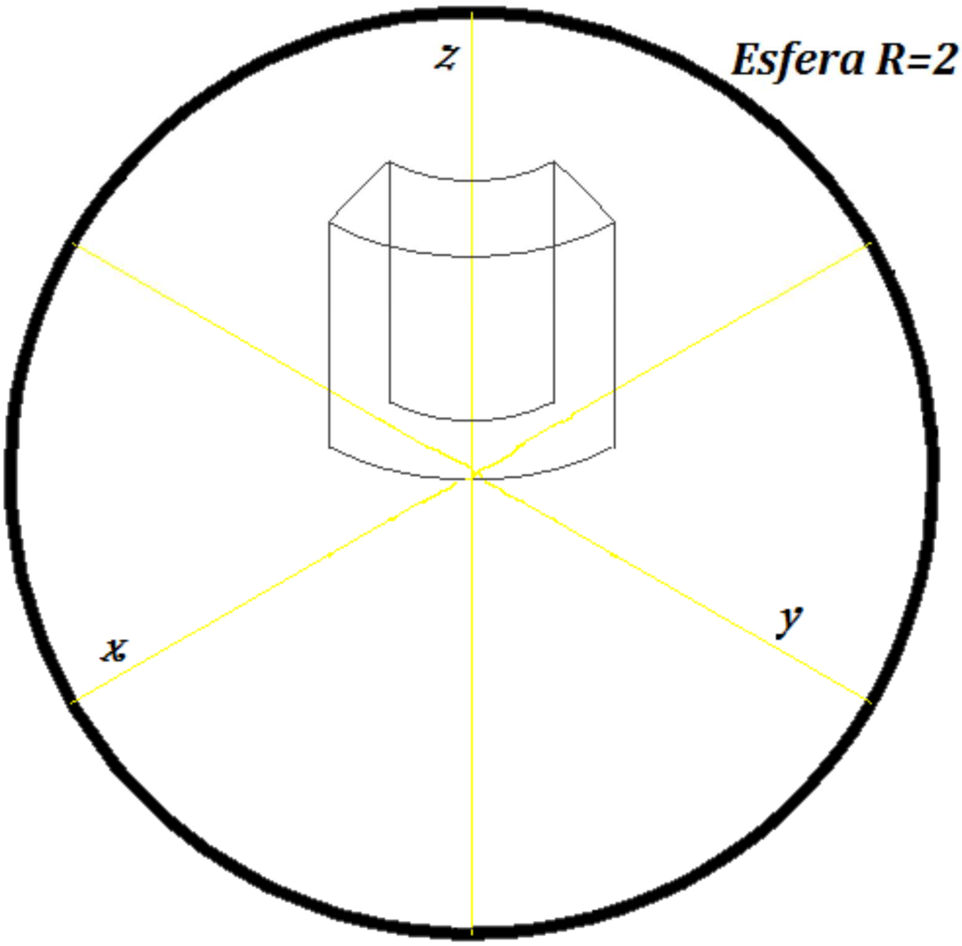
1.) Describa la región de integración mediante las desigualdades en coordenadas cartesianas. Haga un grafico.
2.) Exprese la integral triple en coordenadas cartesianas (Solo exprésela, no calcule dicha integral), integrando primero respecto al eje Z luego respecto al eje Y y por ultimo al eje X.

Solución.

b.- $\int\int\int xyz^2\,dz\,dy\,dx$

a.- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3\cdot\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cdot z^2\,dz\,dr\,d\alpha$

la grafica que representa esta integral es:


Esfera R=2
z
x
y

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 23-03-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Calcule el volumen del solido generado por.

$$\omega = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ \ ; \ z^2 \leq x^2 + y^2 \}$$

Solucion.

El volumen es la seccion que resulta en la parte interna de una esfera y la parte externa del cono de ecuaciones dadas. Aplicando coordenadas esfericas. Sabemos que

$$\rho \in (0,1) \quad ; \quad \theta \in (0,2\pi) \quad ; \quad \varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

Luego el volumen

$$V = \iiint_{\omega} dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi d\theta \ \ => \ \ \boldsymbol{V = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi}$$

2.- Calcular la integral doble

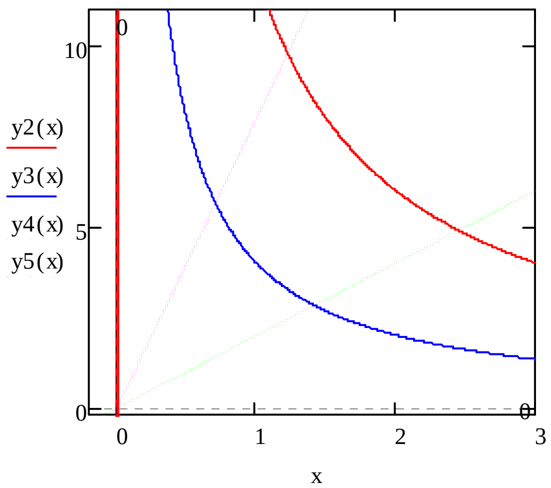
$$\iint_S e^{xy} dxdy$$

Donde S es la región acotada del primer cuadrante limitada por las curvas de ecuaciones $xy = 12$, $xy = 4$, $y = 2x$, $y = 8x$. Use el cambio de variable $u = xy \quad v = \frac{y}{x} \ \ x \neq 0$.

SOLUCION.

Dibujamos la region S.

$y2(x) := \frac{12}{x}$ $\qquad y3(x) := \frac{4}{x}$ $\qquad y4(x) := 2x$ $\qquad y5(x) := 8x$



Buscamos S* usando la sugerencia dada: $\left|\begin{array}{l} xy = u \\ \dfrac{y}{x} = v \end{array}\right.$ implica $x1(u,v) := \sqrt{\dfrac{u}{v}}$ $\quad y1(u,v) := \sqrt{u \cdot v}$

Buscamos el jacobiano del cambio de variable.

$$Jacobiano(u,v) := \left| \left| \begin{pmatrix} \dfrac{d}{du}x1(u,v) & \dfrac{d}{dv}x1(u,v) \\ \dfrac{d}{du}y1(u,v) & \dfrac{d}{dv}y1(u,v) \end{pmatrix} \right| \right| \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{2\cdot|v|}$$

Sea la primera curva a parametrizar.

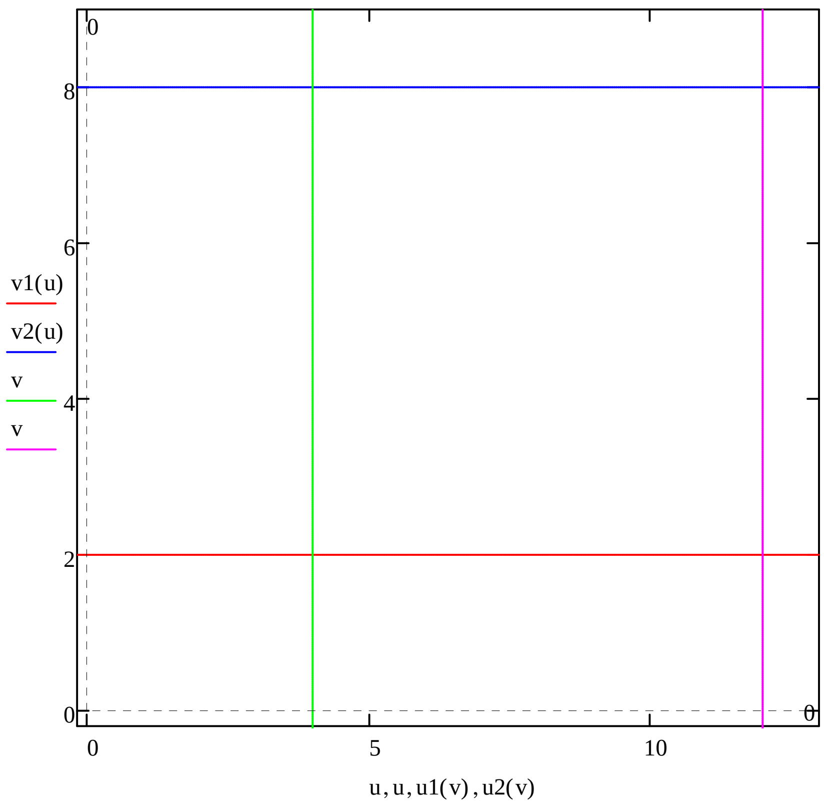
C1 $\left|\begin{array}{l} xy = 12 \\ \sqrt{\dfrac{3}{2}} \le x \le \sqrt{6} \end{array}\right.$ implica $\left|\begin{array}{l} u = 12 \\ 2 \le v \le 8 \end{array}\right.$

C2 $\left|\begin{array}{l} xy = 4 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \sqrt{2} \end{array}\right.$ implica $\left|\begin{array}{l} u = 4 \\ 2 \le v \le 8 \end{array}\right.$

C4 $\left|\begin{array}{l} \dfrac{y}{x} = 8 \\ \sqrt{\dfrac{1}{2}} \le x \le \sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{array}\right.$ implica $\left|\begin{array}{l} v = 8 \\ 4 \le u \le 12 \end{array}\right.$

C3 $\left|\begin{array}{l} \dfrac{y}{x} = 2 \\ \sqrt{2} \le x \le \sqrt{6} \end{array}\right.$ implica $\left|\begin{array}{l} v = 2 \\ 4 \le u \le 12 \end{array}\right.$

Si graficamos la nueva region. $u1(v) := 4 \qquad u2(v) := 12 \qquad v1(u) := 2 \qquad v2(u) := 8$



Queda un cuadrado [4,12]x[2,8]

Integramos:
$$\int_4^{12}\int_2^8 \frac{e^u}{2\cdot|v|}\,dv\,du \rightarrow -\ln(2)\cdot\left(e^4 - e^{12}\right)$$

De igual forma
$$\int_2^{8}\int_4^{12} \frac{e^u}{2\cdot|v|}\,du\,dv \rightarrow -\ln(2)\cdot\left(e^4 - e^{12}\right)$$

3.- Calcular la integral

$$\oint_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

Donde C es la curva que limita el dominio

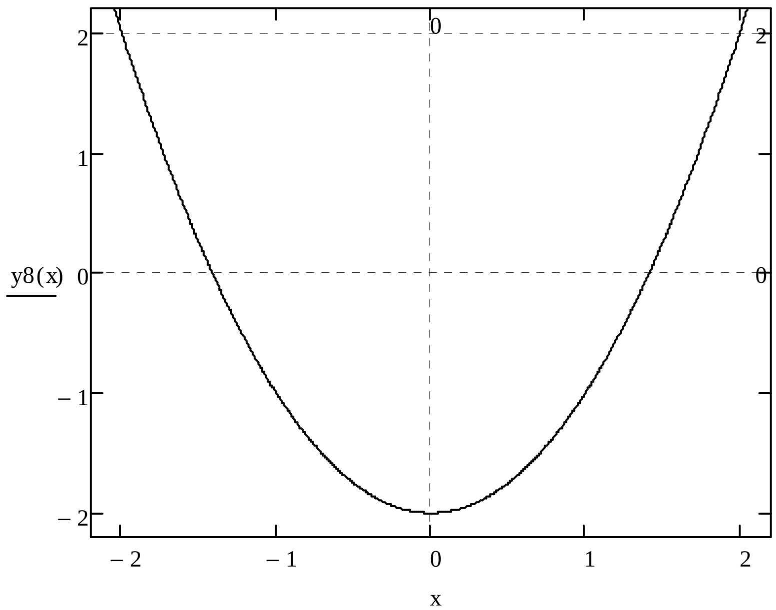
$$D = \{(x,y) \in R^2 :\ \ y \le 2 \ \ y + 2 \le x^2\}$$

Recorrida sentido anti horario

SOLUCION.

Graficamos la region C $\quad y7(y) := 2 \quad y8(x) := \left(x^2 - 2\right)$

Sentido antihorario.



Sea la función $F(x,y) := \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

Si realizamos Green sobre la trayectoria Cerrada.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \rightarrow \frac{2\cdot x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{2\cdot y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \text{ simplify } \rightarrow 0$$

Según Green da cero la integral.

Ya que

$$\oint_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D 0dxdy = 0$$

Si quiere verificar este resultado, tendremos que parametrizar la frontera, lo cual es tedioso, sin embargo.

C1 $\left|\begin{array}{l} y = 2 \\ -2 \le x \le 2 \end{array}\right.$ $\sigma(t) := \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$ $-2 \le t \le 2$ $\frac{d}{dt}\sigma(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Evaluamos F en la parametrizacion. $F(t) := \begin{pmatrix} \dfrac{2}{4+t^2} \\ \dfrac{-t}{4+t^2} \end{pmatrix}$

Evaluamos el producto interno. $F(t)\cdot\left(\frac{d}{dt}\sigma(t)\right) \rightarrow \frac{2}{t^2+4}$

Y resolvemos la integral $\int_{-2}^{2} \frac{2}{t^2+4}\,dt \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $I1 := \frac{\pi}{2}$

Ahora la otra frontera C2 $\left|\begin{array}{l} y = x^2 - 2 \\ -2 \le x \le 2 \end{array}\right.$ $\sigma(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 2 \end{pmatrix}$ $-2 \le t \le 2$ $\frac{d}{dt}\sigma(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2\cdot t \end{pmatrix}$

Evaluamos F en la parametrizacion.

$$F(t) := \begin{bmatrix} \dfrac{t^2 - 2}{t^2 + \left(t^2 - 2\right)^2} \\ \dfrac{-t}{t^2 + \left(t^2 - 2\right)^2} \end{bmatrix}$$

Evaluamos el producto interno.

$$F(t)\cdot\left(\frac{d}{dt}\sigma(t)\right) \rightarrow \frac{t^2 - 2}{\left(t^2 - 2\right)^2 + t^2} - \frac{2\cdot t\cdot t}{\left(t^2 - 2\right)^2 + t^2}$$ igual a $$\frac{-2 - t^2}{t^4 - 3t^2 + 4}$$

Resolvemos la integral.

$$\int \frac{-2 - t^2}{t^4 - 3t^2 + 4}\,dt \rightarrow \operatorname{atan}\left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{2}\right) - \operatorname{atan}(t)$$

$$f(t) := \operatorname{atan}\left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{2}\right) - \operatorname{atan}(t)$$

$$I := f(2) - f(-2)$$

Revisamos el sentido de la parametrizacion. La I1 es inversa al sentido dado lo tanto hay cambio de signo mientras que I mantiene el sentido (mismo signo).

$$I - I1 \rightarrow -\frac{\pi}{2} - 2\cdot\operatorname{atan}(2) - 2\cdot\operatorname{atan}(3)$$ Resultado que lo presentaba GREEN ???????????.

Se da cuenta de que hay una discrepancia entre las respuestas. Según GREEN la integral de línea debe dar CERO pero si parametrizamos cada frontera y se realiza la integral de línea por definición da un resultado DISTINTO de CERO, quien esta mal entonces?? GREEN!! Cuando se utiliza el teorema de Green este GENERA una región, resulta ser que cuando la frontera pasa a región para la integral doble, existe un punto (0,0) en el cual la función F(x,y) NO SE DEFINE, por lo que se hace presencia de una indeterminación en Green, he ahí el problema. OJO CON EL EJERCICIO. Para trabajar el problema sin necesidad de recurrir a la parametrizacion se debe considerar GREEN completo con (0,0) incluido, lo único que haremos será RESTAR una parametrizacion centrada en el punto, lo mas pequeña posible a la integral anterior, así estamos excluyendo el punto indeterminado. Por lo que

$$\oint_{Cgreen} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Realizando lo antes explicado

$$\oint_{Cgreen} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy - \oint_{Zgreen} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

Donde definimos $z = \{(x, y): x^2 + y^2 = \delta^2\}$ <- trayectoria centrada en (0,0) de radio delta

$$\oint_{Z} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

Parametrizamos Z

$$\sigma(\theta) = \begin{pmatrix} \delta\cos(\theta) \\ \delta\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \ :\ F(\sigma(\theta)) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta)}{\delta} \\ \frac{\cos(\theta)}{\delta} \end{pmatrix} \ :\ \sigma'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\,\delta \\ \cos(\theta)\,\delta \end{pmatrix}$$

$$\oint_{Zgreen} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta)}{\delta} \\ \frac{\cos(\theta)}{\delta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\,\delta \\ \cos(\theta)\,\delta \end{pmatrix} \right\rangle d\theta = \int_0^{2\pi} -1 d\theta = -2\pi$$

Pero esta parametrizacion es opuesta a GREEN, que debe ser recorrido sentido horario para que el área quede a la izquierda. Por lo que

$$\oint_{Zgreen} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

Finalizando

$$\oint_{Cgreen} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0 - 2\pi \quad \underbrace{=>}_{CorrespondeSentidos} \quad \oint_{C} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = -2\pi \ \ RESP$$

WAIT, no es la respuesta que se obtuvo en la parametrizacion???

$$I_{parametrizacion} = -\frac{\pi}{2} - 2(\operatorname{atan}(2) + \operatorname{atan}(3)) \neq -2\pi = I_{green}$$

Pues resulta que SI son iguales, NUMERICAMENTE si lo son, así que la respuesta es correcta.

OJO, Este ejercicio se resuelve por Green, pero tenga en cuenta lo expuesto. Se debe restar aquellos puntos que presenten indeterminación sobre la función a integrar.

4.- Usando el cambio de variable. $\begin{cases} x = u \\ y = u^2 v \end{cases}$ y siendo D $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ determine.

$$\iint_D (x + y)dxdy$$

Solucion:

$$\boldsymbol{I = \frac{9}{10}}$$